أولاً

الجبر



الوحدة الأولى : المصفوفات

درس ١ مفهوم المصفوفة ومدور وتساوى المصفوفة

• **تعريف المصفوفة** : هى صورة لتنظيم المعلومات على هيئة صفوف وأعمدة توضع بين قوسين (   )

• إذا كان عدد الصفوف يساوى (م) وعدد الأعمدة يساوى (ن) قيل إن المصفوفة من النظم (م × ن) فى دراستنا م ≤ ٣ ، ن ≤ ٣

• **بعض المصفوفات الخاصة** :

(١) **مصفوفة الصف** : هى المصفوفة التى تتكون من صف واحد وأى عدد من الأعمدة .

(٢) **مصفوفة العمود** : هى المصفوفة التى تتكون من أى عدد من الصفوف وعمود واحد فقط .

(٣) **المصفوفة المربعة** : هى المصفوفة التى فيها عدد الصفوف يساوى عدد الأعمدة .

(٤) **المصفوفة الصفرية** : هى المصفوفة التى جميع عناصرها أصفار . ويرمز لها بمستطيل ▭

• **مدور المصفوفة** : استبدال الصفوف أعمدة والأعمدة صفوف بنفس الترتيب لمصفوفة أعلى النظم (م × ن) نحصل على مصفوفة من النظم (ن × م) يسمى مدور المصفوفة أ ويرمز لها بالرمز $أ^{مد}$ • **ملحوظة** : $(أ^{مد})^{مد} = أ$

• **المصفوفة المتماثلة وشبه المتماثلة** : إذا كانت أ مصفوفة مربعة فإنها تسمى متماثلة وإذا وفقط إذا كانت $أ = أ^{مد}$ ، وتسمى شبه متماثلة إذا وفقط إذا كانت $أ = -أ^{مد}$

• **تساوى مصفوفتين** : يقال لمصفوفتين أنهما متساويتان إذا وفقط إذا كانت لهما نفس النظم (الأبعاد) والعناصر المتناظرة متساوية .

• فمثلاً : $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ \sqrt{٢} & ٥ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & \sqrt{٢} \end{pmatrix}$

• **مثال (١)** : أوجد قيمة كل من المتغيرين س ، ص إذا كان :

$$\begin{pmatrix} ٨ & ٣ \\ ٢ص+٣ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & س+٥ \\ -٥ & ٥ \end{pmatrix}$$

الحـــل

∵ المصفوفتان متساويتان ∴ العناصر المتناظرة فى الأوضاع متساوية

∴ س + ٥ = ٣ ∴ س = −٢

∴ ٢ص + ٣ = −٥ ∴ ٢ص = −٨ ∴ ص = −٤

• مثال (٢) : أوجد مدور المصفوفة التالية : $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{٣} & \text{٢} & \text{١} \end{pmatrix}$ ∴ $\text{أ}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} \text{١} \\ \text{٢} \\ \text{٣} \end{pmatrix}$

• ملحوظة : أ مصفوفة صف على نظم ١ × ٣ ، $\text{أ}^{\text{مد}}$ مصفوفة عمود على نظم ٣ × ١

$\text{ب} = \begin{pmatrix} \text{٥} & \text{٣} \\ \text{٨} & \text{٦} \end{pmatrix}$ ∴ $\text{ب}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} \text{٦} & \text{٣} \\ \text{٨} & \text{٥} \end{pmatrix}$

$\text{ج} = \begin{pmatrix} \text{٣} & \text{٢} & \text{١} \\ \text{٦} & \text{٥} & \text{٤} \\ \text{٩} & \text{٨} & \text{٧} \end{pmatrix}$ ∴ $\text{ج}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} \text{٧} & \text{٤} & \text{١} \\ \text{٨} & \text{٥} & \text{٢} \\ \text{٩} & \text{٦} & \text{٣} \end{pmatrix}$

• ملحوظة : مدور المصفوفة الصفرية هى مصفوفة صفرية .

$\text{د} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \square$ ، $\text{د}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \square$

تمرين (١) : على مفهوم المصفوفة ومدور وتساوى المصفوفة

• أوجد قيمة المجهول فيما يلى :

❶ $\begin{pmatrix} \text{٥} & \text{٣} \\ \text{٤} & \text{٨} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ع}-\text{١} & \text{س} \\ \text{ك} & \text{ص}+\text{١} \end{pmatrix}$

❷ $\begin{pmatrix} \text{٣} & \text{٥} \\ \text{٥} & \text{٣} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{٢ص} & \text{٢س}+\text{١} \\ \text{٥} & \text{٤ل}+\text{١} \end{pmatrix}$

❸ $\begin{pmatrix} \text{٣} & \text{٨} \\ \text{٦} & \text{٨} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\text{ع}}{\text{٣}} & \frac{\text{ل}}{\text{٢}} \\ \text{ب} & \text{أ}+\text{ب} \end{pmatrix}$

❹ $\begin{pmatrix} \text{٤} & \text{٤}- \\ \text{٨} & \text{٢} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{س} & \text{أ}+\text{ب} \\ \text{أ}-\text{ب} & \text{ص} \end{pmatrix}$

❺ $\begin{pmatrix} \text{٤} & \text{٣} \\ \text{٤} & \text{٦} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{س}-\text{ص} & \text{س}+\text{ص} \end{pmatrix}$

❻ $\begin{pmatrix} \text{٢} & \text{١٠} \\ \text{٥} & \text{٤} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{س} & \text{أ}+\text{٢ب} \\ \text{أ}-\text{ب} & \text{س}+\text{ص} \end{pmatrix}$

❼ $\begin{pmatrix} \text{٢أ} & \text{٨} \\ \text{ب} & \text{ج} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{د} & \text{ج} \\ \text{١٤أ} & \text{٢ب} \end{pmatrix}$

❽ $\begin{pmatrix} \text{٢} & \text{٤ب} \\ \text{٢أ}+\text{د} & \text{٦} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ب} & \text{أ}+\text{ب} \\ \text{ب}-\text{أ} & \text{٣ج} \end{pmatrix}$

❾ $\begin{pmatrix} \text{١٤}- & \text{٣} \\ \text{١٨} & \text{٠} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{٣ب}+\text{أ} & \text{٢أ}+\text{١} \\ \text{٢ج}+\text{د} & \text{٢ب}+\text{ج} \end{pmatrix}$

❿ $\begin{pmatrix} \text{٤٩} & \text{٤٥} \\ \text{٢٠} & \text{٦} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أ}+\text{٢ب} & \text{٥أ} \\ \text{د}+\text{٥ج} & \text{٢ج} \end{pmatrix}$

• أوجد مدور المصفوفات التالية :

(١١) $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{٥} & \text{٤} & \text{٣} \end{pmatrix}$

(١٢) $\text{ب} = \begin{pmatrix} \text{٥} & \text{٨} \\ \text{٦} & \text{٢} \end{pmatrix}$

(١٣) $\text{ج} = \begin{pmatrix} \text{٤} & \text{٦} & \text{٣} \\ \text{١} & \text{٨} & \text{٥} \end{pmatrix}$

(١٤) $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{١} & \text{٣} & \text{٢} \\ \text{٩} & \text{٨} & \text{٥} \\ \text{١٠} & \text{٢} & \text{١} \end{pmatrix}$

(١٥) $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{٠} & \text{٠} & \text{١} \\ \text{٠} & \text{١} & \text{٠} \\ \text{١} & \text{٠} & \text{٠} \end{pmatrix}$

(١٦) $\text{ب} = \begin{pmatrix} \text{٦} & \text{٥} & \text{٢س} \\ \text{٩} & \text{١} & \text{٥} \\ \text{٤} & \text{٩} & \text{٦} \end{pmatrix}$

(١٧) $\text{س} = \begin{pmatrix} \text{١} & \text{٥} & \text{٣} \\ \text{٩}- & \text{٦} & \text{٥}- \\ \text{٧} & \text{٩} & \text{١}- \end{pmatrix}$

(١٨) $\text{أ}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} \text{٥} & \text{٦} \\ \text{٤} & \text{٢} \\ \text{٢} & \text{١} \end{pmatrix}$ أوجد أ

(١٩) $\text{س}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} \text{٢} & \text{٥} & \text{٦} \\ \text{١} & \text{٤} & \text{٣} \\ \text{٨} & \text{٠} & \text{٩} \end{pmatrix}$ أوجد س

(٢٠) $\text{ص}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} \text{٦} & \text{٢} & \text{١} \end{pmatrix}$ أوجد ص

(٢١) $\text{أ}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} \text{٤} & \text{١} & \text{١} \\ \text{٠} & \text{٢} & \text{٠} \\ \text{٠} & \text{٠} & \text{٠} \end{pmatrix}$ أوجد أ

(٢٢) $\text{أ}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} \text{٠} & \text{٠} & \text{١} \\ \text{٠} & \text{١} & \text{٣} \\ \text{١} & \text{٦} & \text{٤} \end{pmatrix}$ أوجد أ

(٢٣) $\text{س}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} \text{٥} & \text{٢} & \text{١} \\ \text{٦} & \text{٥} & \text{٠} \\ \text{٤} & \text{٠} & \text{٠} \end{pmatrix}$ أوجد س

(٢٤) $\text{س}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} \text{٤} & \text{١}- & \text{١} \\ \text{٦} & \text{٢} & \text{١}- \\ \text{٥} & \text{٦} & \text{٤} \end{pmatrix}$ هل هى متماثلة أو شبه متماثلة ؟

• **إمكانية جمع مصفوفتين أ ، ب :** الجمع ممكن إذا كان لهما نفس النظم .

• مثال (١) : إذا كان $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٣ & ٨ \\ -١ & -٦ \end{pmatrix}$ أوجد أ + ب ، ب + أ

الحـــل

$$أ + ب = \begin{pmatrix} ٣+٣ & ٤+٨ \\ ٥-١ & ٦-٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & ١٢ \\ ٤ & صفر \end{pmatrix}$$

• **ملحوظة :** نفس النظم ٢ × ٢   ∴ عملية الجمع مغلقة

$$ب + أ = \begin{pmatrix} ٣+٣ & ٨+٤ \\ -١+٥ & -٦+٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & ١٢ \\ ٤ & صفر \end{pmatrix}$$

∵ أ + ب = ب + أ   ∴ عملية الجمع إبدالية

• مثال (٢) : إذا كان : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٦ & ٢ \\ -٢ & -٤ \end{pmatrix}$ ، $جـ = \begin{pmatrix} ١ & ٧ \\ ٦ & -٥ \end{pmatrix}$

أوجد : (١) أ + ب + جـ   (٢) (أ + ب) + جـ   (٣) أ + (ب + جـ)

الحـــل

$$(١)\ أ + ب + جـ = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٦ & ٢ \\ -٢ & -٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & ٧ \\ ٦ & -٥ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٢+٦+١ & ٣+٢+٧ \\ ٥-٢+٦ & ٤-٤-٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ & ١٢ \\ ٩ & -٥ \end{pmatrix}$$

$$(٢)\ (أ + ب) + جـ = \left[\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٦ & ٢ \\ -٢ & -٤ \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} ١ & ٧ \\ ٦ & -٥ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٨ & ٥ \\ ٣ & صفر \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & ٧ \\ ٦ & -٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ & ١٢ \\ ٩ & -٥ \end{pmatrix}$$

$$(٣)\ أ + (ب + جـ) = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} ٦ & ٢ \\ -٢ & -٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & ٧ \\ ٦ & -٥ \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٧ & ٩ \\ ٤ & -٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ & ١٢ \\ ٩ & -٥ \end{pmatrix}$$

∴ أ + ب + جـ = (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ)   ∴ عملية الجمع دامجة

• **عملية ضرب عدد حقيقي فى مصفوفة :**

ناتج ضرب مصفوفة أ على نظم م × ن في عدد حقيقي ك ≠ ٠ هو مصفوفة يضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة أ في العدد الحقيقي ك

إذا كان : $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٦ & ٨ \end{pmatrix}$ فإن $٢أ = \begin{pmatrix} ٦ & ١٠ \\ ١٢ & ١٦ \end{pmatrix}$ ، $-أ = \begin{pmatrix} -٣ & -٥ \\ -٦ & -٨ \end{pmatrix}$

أ + □ = □ + أ = أ   يسمى □ المحايد الجمعي

حيث □ هى المصفوفة الصفرية

خاصية : أ + (-أ) = -أ + أ = □

حيث يسمى (-أ) النظير الجمعي للمصفوفة أ

• **طرح المصفوفات :**

إذا كانت كل من المصفوفتين على النظم م × ن فإن المصفوفة ح = أ - ب = أ + (-ب) حيث -ب هو المعكوس الجمعي للمصفوفة ب

• مثال (٣) : إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ٦ & ٨ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٩ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $جـ = \begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ١٢ & ٥ \end{pmatrix}$

أوجد : ٢أ - ٣ب - ٤جـ

الحـــل

$$٢أ = ٢\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ٦ & ٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ١٠ \\ ١٢ & ١٦ \end{pmatrix} \ ،\ -٣ب = -٣\begin{pmatrix} ٩ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢٧ & -١٢ \\ -٣ & -٩ \end{pmatrix}$$

$$-٤جـ = -٤\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ١٢ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١٦ & -٨ \\ -٤٨ & -٢٠ \end{pmatrix}$$

٢أ - ٣ب - ٤جـ = ٢أ + (-٣ب) + (-٤جـ)

$$= \begin{pmatrix} ٤ & ١٠ \\ ١٢ & ١٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٢٧ & -١٢ \\ -٣ & -٩ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -١٦ & -٨ \\ -٤٨ & -٢٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٣٩ & -١٠ \\ -٣٩ & -١٣ \end{pmatrix}$$

• مثال (٤) : إذا كانت : $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٢ & ٥ & ٣ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

$\text{د} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ١ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \end{pmatrix}$ أوجد المصفوفة س حيث ٢ب − ٣ج = ٤س − ٣د

الحل

∵ ٢ب − ٣ج = ٤س − ٣د   ∴ ٢ب − ٣ج + ٣د = ٤س

∴ $\text{س} = \frac{١}{٤}[\text{٢ب} - \text{٣ج} + \text{٣د}]$

$$∴ \text{س} = \frac{١}{٤}\left[\begin{pmatrix} ٤ & ١٠ & ٦ \\ ٢ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ٠ & ٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & -٣ \\ ٠ & -٣ & ٠ \\ -٣ & ٠ & ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٣ \\ ٣ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ٣ & ٠ \end{pmatrix}\right]$$

$$\text{س} = \frac{١}{٤}\begin{pmatrix} ٤ & ١٠ & ٦ \\ ٥ & -٣ & ٣ \\ -١ & ٣ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & \frac{٥}{٢} & \frac{٣}{٢} \\ \frac{٥}{٤} & \frac{-٣}{٤} & \frac{٣}{٤} \\ \frac{-١}{٤} & \frac{٣}{٤} & \frac{١}{٢} \end{pmatrix}$$

• مثال (٥) : إذا كان : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٦ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٨ & ٦ \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س إذا كان ٥ب − $\text{س}^{\text{مد}}$ = ٣أ

الحل

∵ ٥ب − $\text{س}^{\text{مد}}$ = ٣أ   ∴ $\text{س}^{\text{مد}}$ = ٥ب − ٣أ = ٥ب + (−٣) أ

$$∴ \text{س}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٢٥ & ١٠ \\ ٤٠ & ٣٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -١٥ & -٩ \\ -١٨ & -٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ & ١ \\ ٢٢ & ٢٤ \end{pmatrix}$$

$$∴ \text{س} = (\text{س}^{\text{مد}})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ١٠ & ١ \\ ٢٢ & ٢٤ \end{pmatrix}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٢٤ & ١ \\ ٢٢ & ١٠ \end{pmatrix}$$

تمرين (٢) : على جمع وطرح المصفوفات

١ إذا كانت $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٦ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ -٢ & -١ \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} ٤ & ٦ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}$

أوجد : أولاً : أ + ٣ب   ثانيًا : ٢أ − ٥ب

ثالثًا : ب + ٢ج − أ   رابعًا : أ − ٢ب − ٣ج

---

٢ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٧ & ٤ & ١ \\ ٨ & ٥ & ٢ \\ ٩ & ٦ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} -١ & ٢ & ٥ \\ -٢ & ٣ & ٦ \\ ٧ & ٤ & ١ \end{pmatrix}$

أوجد قيمة المصفوفة س التى تحقق المعادلة :

أولاً : ٣س − ٣ب = ٢أ   ثانيًا : ٣$\text{س}^{\text{مد}}$ = أ − ٢ب

ثالثًا : س + ٢$\text{أ}^{\text{مد}}$ = ٢$\text{ب}^{\text{مد}}$

---

٣ أوجد قيمة المجهول إذا كان :

[أ] $\begin{pmatrix} ٢ & \text{س} \\ ٣ & \text{ص} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٧ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ١٠ & ٣ \end{pmatrix}$

[ب] $\begin{pmatrix} \text{ص} & \text{س} \\ \text{ل} & \text{ع} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٣ & ٤ \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix}$

[ج] $\begin{pmatrix} \text{٢س} & ٤ \\ \text{ص} & ٣ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{س} & -٢ \\ ٤ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ & ٦ \\ ٨ & ٣ \end{pmatrix}$

[د] $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & \text{س} \\ ٣ & \text{ص} & ٠ \\ \text{ع} & ٥ & ٤ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٦ & ٥ & ٤ \\ ٩ & ٨ & ٧ \\ -١ & -٣ & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٥ & -٣ & ١ \\ -٦ & ١ & -٧ \\ ٤ & ٨ & ٦ \end{pmatrix}$

❹ إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ ٥ & ١ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ ٠ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ ٠ & ٥ \end{pmatrix}$

أوجد فى كل حالة مما يلى المصفوفة س بحيث :

أولاً : $أ + س = ب + ج$

ثانيًا : $٣أ + ٢س = ٢ب - ج$

ثالثًا : $٢(ب - س) = ٢(س - ج) - ب$

رابعًا : $\frac{١}{٢}(أ + س) = ٣س + ٢ب$

خامسًا : $٢أ + س^{مد} = ٢ب - ٥ج$

سادسًا : $٣(س + أ) = ٢س + ب$

سابعًا : $٢س + س^{مد} = أ + ٢ب - ٣ج$

ثامنًا : $س^{مد} + ٢أ^{مد} = (٢ب + ج)^{مد}$

---

❺ أوجد مصفوفتين س ، ص بحيث يكون :

$$س + ص = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix} \quad ، \quad س - ص = \begin{pmatrix} ٨ & ٤ \\ ٦ & ١٠ \end{pmatrix}$$

---

❻ أوجد المصفوفتين س ، ص بحيث يكون :

$$٣س + ٢ص = \begin{pmatrix} ١ & ١٢ \\ ١١ & -٥ \\ ٥ & -١٢ \end{pmatrix} \quad ، \quad ٢س - ٣ص = \begin{pmatrix} ٥ & -٥ \\ ٣ & ١٤ \\ -١٤ & ٥ \end{pmatrix}$$

---

❼ إذا كان : $أ = \begin{pmatrix} -٣ & ٢ & ١ \\ ١ & ٦ & -١٤ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ ٢ & -٣ & ٥ \end{pmatrix}$

وكان $س + ٢ص = ٤أ + ٢ب$ ، $س - ص = ٣أ - ٢ب$

أوجد كلاً من المصفوفتين س ، ص

درس ٣

ضرب المصفوفات

• إمكانية ضرب مصفوفتين :

لضرب مصفوفة أ فى مصفوفة ب يجب أن يكون عدد أعمدة أ = عدد صفوف ب

فمثلاً : $أ_{م×ن} \times ب_{ن×ك} = ج_{م×ك}$

إذا كانت المصفوفة أ على نظم م × ن والمصفوفة ب على نظم ن × ك
فإن عملية الضرب ممكنة وناتج الضرب مصفوفة على نظم م × ك

• مثال (١) : $أ_{٢×٣} \times ب_{٣×٢}$ فإن ناتج الضرب $ج_{٢×٢}$

• مثال (٢) : $أ_{١×٣} \times ب_{٣×١}$ فإن ناتج الضرب $ج_{١×١}$

• مثال (٣) : $أ_{٣×٢} \times ب_{٣×٢}$ إمكانية الضرب غير ممكنة

لأن عدد الأعمدة فى الأولى ≠ عدد الصفوف فى الثانية

إذا كان لدينا مصفوفتين أ ، ب وكان هناك إمكانية الضرب .

سؤال : فما هى الطريقة لإيجاد عناصر حاصل الضرب ج ؟

• مثال (٤) : إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٤ & ٦ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٨ & ٧ \end{pmatrix}$ أوجد أ × ب ، ب × أ

الحل

$$أ \times ب = \begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٤ & ٦ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٨ & ٧ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٣×٢+٥×٨ & ٣×١+٥×٧ \\ ٤×٢+٦×٨ & ٤×١+٦×٧ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٦+٤٠ & ٣+٣٥ \\ ٨+٤٨ & ٤+٤٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤٦ & ٣٨ \\ ٥٦ & ٤٦ \end{pmatrix}$$

$$ب \times أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٨ & ٧ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٤ & ٦ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٢×٣+١×٤ & ٢×٥+١×٦ \\ ٨×٣+٧×٤ & ٨×٥+٧×٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦+٤ & ١٠+٦ \\ ٢٤+٢٨ & ٤٠+٤٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ & ١٦ \\ ٥٢ & ٨٢ \end{pmatrix}$$

• عناصر الصف الأول مع عناصر العمود الأول ثم العمود الثانى وهكذا تعطى عناصر الصف الأول فى الناتج .

• عناصر الصف الثانى مع عناصر العمود الأول ثم الثانى تعطى عناصر الصف الثانى فى الناتج .

• لاحظ أن : أ ب ≠ ب أ ∴ عملية الضرب غير إبدالية

• مثال (٥): إذا كان: $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$

أثبت أن: $(أب)^{مد} = ب^{مد} \times أ^{مد}$

الحل

الطرف الأيمن:

$$\because أب = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١+٤ & ١+٦ \\ ١+٦ & ١+٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ٧ \\ ٧ & ١٠ \end{pmatrix}$$

$$\therefore (أب)^{مد} = \begin{pmatrix} ١٠ & ٧ \\ ٧ & ٥ \end{pmatrix}$$

الطرف الأيسر:

$$ب^{مد} \times أ^{مد} = \begin{pmatrix} ١+٩ & ١+٦ \\ ١+٦ & ١+٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$$

$$\therefore ب^{مد} أ^{مد} = \begin{pmatrix} ١٠ & ٧ \\ ٧ & ٥ \end{pmatrix} = (أب)^{مد}$$

• لاحظ أن: $أ^{مد} ب^{مد} = \begin{pmatrix} ٥ & ١٢ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣+٢ & ٦+٦ \\ ١+١ & ٢+٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$

• القاعدة: $(أب)^{مد} = ب^{مد} أ^{مد}$ لاحظ أن: $أ^{مد} ب^{مد} \neq ب^{مد} أ^{مد}$

• مصفوفة الوحدة: هى المصفوفة المربعة التى جميع عناصر قطرها الرئيسى تساوى العدد الحقيقى واحد وباقى عناصرها تساوى العدد الحقيقى صفر ورمزها I .

• خواص عملية الضرب: إذا كانت أ ، ب ، ج ثلاث مصفوفات فإن:

(١) خاصية الدمج: أ ب ج = (أ ب)ج = أ(ب ج)

(٢) خاصية المحايد الضربى: أI = I أ = أ

(٣) خاصية توزيع ضرب المصفوفة على جمعها: أ(ب + ج) = أ ب + أ ج

• مثال (٦): إذا كان: $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

أثبت أن: أ(ب + ج) = أب + أج

الحل

الطرف الأيمن: $\because ب + ج = \begin{pmatrix} ٤ & ٤ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$

$$\therefore أ(ب + ج) = \begin{pmatrix} ٤ & ٤ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١+٨ & ١+٨ \\ ١+١٢ & ١+١٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ & ٩ \\ ١٣ & ١٣ \end{pmatrix}$$

الطرف الأيسر: $أب + أج = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} ٠+٤ & ٠+٢ \\ ٠+٦ & ٠+٣ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١+٤ & ١+٦ \\ ١+٦ & ١+٩ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٥ & ٧ \\ ٧ & ١٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٦ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ & ٩ \\ ١٣ & ١٣ \end{pmatrix} = \text{الأيمن}$$

تمرين (٣): على ضرب المصفوفات

١ إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٠ & ١- \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٤ & ٢- \\ ١- & ٣ \end{pmatrix}$ أوجد أ ب ، ب أ

٢ إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ & ٠ \\ ١ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٤ & ٥ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \\ ٨ & ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ أوجد أ ب ، ب أ

٣ إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ١- & ٢- \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١- & ١ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ٣ & ١- \\ ١- & ٢ \end{pmatrix}$ فأوجد:

أولاً: أ(ب + ج)   ثانيًا: (أ ب)ج   ثالثًا: $أ^{مد} ب^{مد}$

٤ أوجد قيمة المجهول إذا كان:

[أ] $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ٤ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & س \\ ٣ & ص \end{pmatrix}$

[ب] $\begin{pmatrix} ٤ & س \\ ص & ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ٣ & ٨ \end{pmatrix}$

[جـ] ... $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \end{pmatrix}$ ... ٤ ص ٢ع ... ١٧ ... -٢٠)

---

٥ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٤ & س \\ -٨ & ص \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٢ & -٤ \end{pmatrix}$ وكان أ ب = ب أ

أوجد قيمة س ، ص

---

٦ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} -٤ & ٦ \\ -٦ & ٩ \end{pmatrix}$ أثبت أن $أ^٢$ = □

---

٧ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{pmatrix}$ فأثبت أن $أ^٢$ = ٣أ

---

٨ إذا كانت أ = $\frac{١}{٥}\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ فبين أن $أ^٢$ = أ

---

٩ إذا كانت م = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٠ & -١ \\ ٣ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$، هـ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٢ \\ ٠ & -١ & -١ \\ ٢ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$ أوجد قيمة $م^٢$ - م هـ

---

١٠ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ & ١ \\ ٤ & ٣ & -١ \end{pmatrix}$، ب = $\begin{pmatrix} -٧ & ٥ & -٢ \\ ٥ & -٥ & ١٠ \\ -٣ & ٥ & -٨ \end{pmatrix}$ أثبت أن : أ ب = ١٠I

---

١١ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٨ & ٧ \end{pmatrix}$ ، ب = $\frac{-١}{١١}\begin{pmatrix} -٥ & ٨ \\ ٣ & -٧ \end{pmatrix}$ أثبت أن أ ب = $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

---

١٢ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٧ & ٤ \end{pmatrix}$، ب = $\begin{pmatrix} -١ & ٣ \\ ٣ & -٥ \end{pmatrix}$

أوجد س إذا كان $س^{مد}$ = أ ب + أ

....

١٣ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٦ & ٤ & ٣ \\ ١ & ٠ & ٣ \\ ٩ & ٦ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٦ & ٠ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٢ \\ ١ & ٥ & ٣ \end{pmatrix}$

أوجد س إذا كان $س^{مد}$ + ٢س = أ ب + ٢ب

---

١٤ إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٤ & -١ \\ -٣ & ٦ \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س التى تحقق : أولاً : ٢أ - $ب^{مد}$ + ٣س = $أ^٢$ + ٥$س^{مد}$

ثانيًا : أ ب - ٥س = $(ب أ)^{مد}$ + $س^{مد}$

---

١٥ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٢ & -٤ \end{pmatrix}$ أثبت أن : $أ^٢$ - ٤أ = □

---

١٦ إذا كانت $\begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$ فأثبت أن : $أ^٢$ - ٤أ + I = □

---

١٧ إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{pmatrix}$ أثبت أن : $أ^٢$ - ٧أ + ١٣I = □

---

١٨ إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ -٦ & ١ \end{pmatrix}$ أثبت أن : $أ^٢$ + ٤أ - ١٧I = □

---

١٩ إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ فأثبت أن : $أ^٢$ - أ - ٦I = □

تعريف (١): إذا كانت أ مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢ حيث:

$$أ = \begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & ء \end{pmatrix}$$ فإن محدد المصفوفة أ يرمز له بالرمز |أ|

ويسمى محدد الرتبة الثانية وهو العدد المعرَّف كالآتى:

$$|أ| = \begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & ء \end{vmatrix} = أ ء - ب جـ$$

القطر الرئيسى

مثال (١): (أ) أوجد قيمة $\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}$ = ٥ × ٦ − ٦ × ٩ = −٢٤

(ب) أوجد قيمة $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ = ١ × ٧ − ٢ × ٠ = ٧

تعريف (٢): يسمى محدد المصفوفة على النظم ٣ × ٣ محدد الرتبة الثالثة.

$$\text{محدد الرتبة الثالثة} = \begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ ء & هـ & و \\ ز & ح & ط \end{vmatrix}$$

$$= أ \begin{vmatrix} هـ & و \\ ح & ط \end{vmatrix} - ب \begin{vmatrix} ء & و \\ ز & ط \end{vmatrix} + جـ \begin{vmatrix} ء & هـ \\ ز & ح \end{vmatrix}$$

= أ (هـ ط − و ح) − ب (ء ط − و ز) + جـ (ء ح − هـ ز)

= أ هـ ط − أ و ح − ب ء ط + ب و ز + جـ ء ح − جـ هـ ز

= أ هـ ط + ب و ز + جـ ء ح − أ و ح − ب ء ط − جـ هـ ز

ملحوظة هامة: الناتج الأخير هو ناتج عن فك المحدد بطريقة تسمى الأقطار هكذا.

الأقطار الأخرى

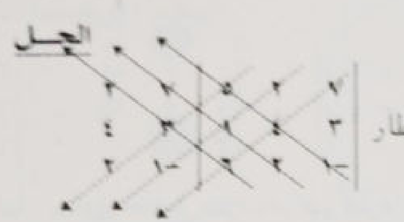
الأقطار الرئيسية

لاحظ أن: الناتج = حاصل ضرب الأقطار الرئيسى − حاصل ضرب الأقطار الأخرى

• مثال (٢): أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$

الحـل

طريقة الأقطار



الناتج = ٧×٤×٦ + ٢×١×−١ + ٥×٣×٢ − ٥×٤×−١ − ٧×١×٢ − ٢×٣×٦
= ١٦٦

الطريقة الثانية: الناتج = $7\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

= ٧(٢٤ − ٢) − ٢(١٨ + ١) + ٥(٦ + ٤) = ١٦٦

• **ملحوظة هامة:** يمكن فك المحدد من الرتبة الثالثة بدلالة عناصر أى صف (عمود) تحت قاعدة الإشارات المأخوذة للعناصر المضروبة فى المحددات الرتبة الثانية

قاعدة الإشارات هى $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

• **ملحوظة:** القطر الرئيسى والقطر الآخر موجبة والباقى سالب.

• مثال (٣): أوجد قيمة المحدد = $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

الحـل

خذ مثلاً عناصر العمود الثانى مع وضع الإشارات وهى − ، + ، − على الترتيب

∴ قيمة المحدد = $-\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$

= −(١٠ − ٦) + ٢(٦ − ٤٨) − ٤(٣ − ٤٠)

= −٤ − ٨٤ + ١٤٨ = ٦٠

مثال (٤) : الأشكال التالية محدد المصفوفة المثلثية

$\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ٥ & ٤ \\ ٧ & ٦ & ٤ \end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ٥ \\ ١ & ٨ & ٠ \\ ٤ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ٥ \\ ٠ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٢ & ٠ \end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & أ \\ ٠ & ب & ٠ \\ ج & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$

تعريف : قيمة المحدد للمصفوفة المثلثية : يساوى حاصل ضرب عناصر قطرها الرئيسى .

مثال (٥) : ما قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٤ \\ ٦ & ٨ & ٠ \\ ٢ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$

الحل

المحدد هو محدد مصفوفة مثلثية ∴ قيمة المحدد = ٤ × ٨ × ٢ = ٦٤

تطبيق (١) :

نستخدم المحدد لإيجاد مساحة سطح المثلث بمعلومية إحداثيات رؤوس المثلث .

إذا كان لدينا مثلث س ص ع إحداثيات رؤوسه هى (أ ، ب) ، (ج ، ء) ، (هـ ، و)

على الترتيب فإن المساحة : م = $\frac{١}{٢}$ $\begin{vmatrix} ١ & ب & أ \\ ١ & ء & ج \\ ١ & و & هـ \end{vmatrix}$

مثال (٦) : أوجد مستخدمًا المحددات مساحة سطح المثلث الذى إحداثيات رؤوسه هى : (٢ ، ١) ، (٣ ، −٤) ، (٥ ، ٠)

الحل

$\frac{١}{٢}$ $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ٢ \\ ١ & −٤ & ٣ \\ ١ & ٠ & ٥ \end{vmatrix}$ = ٧ وحدة طول مربع

ملحوظة : فك عن طريق الأقطار أو المحددات الرتبة الثانية .

تمرين (٤) : على المحددات

• أوجد قيمة المحددات الآتية من (١) إلى (٢١) :

(١) $\begin{vmatrix} ٠ & ٢ \\ ٥ & ٠ \end{vmatrix}$ (٢) $\begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix}$ (٣) $\begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ٦ & ٢ \end{vmatrix}$

(٤) $\begin{vmatrix} ٢ & ٨ \\ ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ (٥) $\begin{vmatrix} ٥ & ٧ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}$ (٦) $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ −١ & ٣ \end{vmatrix}$

(٧) $\begin{vmatrix} −٣ & ٦ \\ −٧ & ١٩ \end{vmatrix}$ (٨) $\begin{vmatrix} أ & أ+س \\ ب & ب+ص \end{vmatrix}$ (٩) $\begin{vmatrix} س^٢+١ & س+١ \\ ص^٢+١ & ص+١ \end{vmatrix}$

(١٠) $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٤ & ٤ & −١ \\ ٨ & ٧ & ٠ \end{vmatrix}$ (١١) $\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٠ \\ ٧ & ٦ & ٢ \\ ٢ & ١٠ & ٠ \end{vmatrix}$ (١٢) $\begin{vmatrix} ٣ & −٤ & ٣ \\ −٣١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ٠ & ٥ \end{vmatrix}$

(١٣) $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ١٢ \\ ٥ & ٧ & −٣ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ (١٤) $\begin{vmatrix} ٦ & ٥ & ٦ \\ ٢ & ٥ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ (١٥) $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ٢ & ٨ \\ ٣ & ٤ & ٦ \end{vmatrix}$

(١٦) $\begin{vmatrix} ٤ & ٢ & ٤ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٣ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ (١٧) $\begin{vmatrix} ٢ & ٧ & −١ \\ ٥ & ٠ & ٣ \\ ١ & ٠ & ٤ \end{vmatrix}$ (١٨) $\begin{vmatrix} ٠ & ٤ & −٢ \\ ١ & −٣ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ٥ \end{vmatrix}$

(١٩) $\begin{vmatrix} ٠ & ٣ & ٠ \\ ٧ & ٩ & ٥ \\ ٠ & ٨ & ٠ \end{vmatrix}$ (٢٠) $\begin{vmatrix} ٥ & ٣ & ١ \\ ٩ & ٨ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ (٢١) $\begin{vmatrix} ٤ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٦ & ٨ \\ ٠ & ٠ & ٨ \end{vmatrix}$

(٢٢) أوجد مساحة سطح المثلث أ ب ج الذى فيه : أ(٢ ، ٤) ، ب(−٢ ، ٤) ، ج(٠ ، −٢)

(٢٣) أوجد مساحة سطح المثلث س ص ع الذى فيه :
س(٣ ، ٣) ، ص(−٤ ، ٢) ، ع(١ ، −٤)

(٢٤) أوجد مساحة سطح المثلث أ ب ج الذى فيه :
أ(−٢ ، −٢) ، ب(٣ ، ١) ، ج(−٤ ، ٣)

(٢٥) أوجد مساحة سطح المثلث أ ب ج الذى فيه :
أ(٠ ، ٢) ، ب(٣ ، ٥) ، ج(−٣ ، ٢)

أولاً : حل أنظمة المعادلات الخطية فى مجهولين :

إذا كان لدينا نظام من المعادلات الخطية فى مجهولين :

أس + ب ص = م ، جـ س + ء ص = هـ

فإن : $\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{ء} \end{vmatrix}$ = (أ ء − ب جـ) تسمى محدد مصفوفة المعاملات وتقرأ (دلتا)

إذا كان Δ ≠ ٠ فإن المعادلات لها حل وحيد ، لكن إذا كان Δ = ٠ .
فإن للمعادلات عدد لا نهائى من الحلول أو ليس لها حل .

$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} \text{م} & \text{ب} \\ \text{هـ} & \text{ء} \end{vmatrix}$ = (م ء − ب هـ) تسمى (محدد مصفوفة المجهول س)

وتقرأ (دلتا للمجهول س) . وضعنا أماكن معاملات س فى دلتا الثوابت م ، هـ

$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{م} \\ \text{جـ} & \text{هـ} \end{vmatrix}$ = (أ هـ − م جـ) تسمى (محدد مصفوفة المجهول ص)

وضعنا أماكن معاملات ص فى دلتا الثوابت م ، هـ

∴ قيمة المجهول ∴ س = $\frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta}$ ، ∴ ص = $\frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta}$

• مثال (١) : حل نظام المعادلتين الآتيتين بطريقة كرامر :

س + ص = ٢ ، ٢س + ٣ص = ٥

الحل

$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}$ = ٣ − ٢ = ١

$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٣ \end{vmatrix}$ = ٦ − ٥ = ١ ، $\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix}$ = ٥ − ٤ = ١

∴ س = $\frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{١}{١}$ = ١ ، ∴ ص = $\frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta}$ = ١

∴ م . ح = {(١ ، ١)}

ثانيًا : حل أنظمة المعادلات الخطية فى ثلاثة مجاهيل :

• مثال (١) : حل نظام المعادلات الخطية التالية بطريقة كرامر :

س + ص − ع = ٢ ، س + ٢ص + ع = ٧ ، ٣س − ص + ع = ١٠

الحل

$\Delta_{(\text{محدد المعاملات})} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & -١ \\ ١ & ٢ & ١ \\ ٣ & -١ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & -١ \\ ١ & ٢ & ١ \\ ٣ & -١ & ١ \end{vmatrix}\begin{matrix} ١ & ١ \\ ١ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{matrix}$

= ٢ + ٣ + ١ − (−٦ − ١ + ١) = ١٢

، Δس = محدد المجهول س نحصل عليه بتغيير عناصر العمود الأول (معاملات س) بالثوابت ٢ ، ٧ ، ١٠ وهى الحدود المطلقة فى المعادلات الثلاثة بالترتيب .

، $\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & -١ \\ ٧ & ٢ & ١ \\ ١٠ & -١ & ١ \end{vmatrix}\begin{matrix} ٢ & ١ \\ ٧ & ٢ \\ ١٠ & -١ \end{matrix}$ = (٤ + ١٠ + ٧) − (−٢٠ − ٢ + ٧) = ٣٦

، $\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & -١ \\ ١ & ٧ & ١ \\ ٣ & ١٠ & ١ \end{vmatrix}\begin{matrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٧ \\ ٣ & ١٠ \end{matrix}$ = (٧ + ٦ − ١٠) − (−٢١ + ١٠ + ٢) = ١٢

، $\Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٧ \\ ٣ & -١ & ١٠ \end{vmatrix}\begin{matrix} ١ & ١ \\ ١ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{matrix}$ = (٢٠ + ٢١ − ٢) − (١٢ − ٧ + ١٠) = ٢٤

∴ س = $\frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{٣٦}{١٢}$ = ٣ ، ص = $\frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{١٢}{١٢}$ = ١ ، ع = $\frac{\Delta_{\text{ع}}}{\Delta} = \frac{٤٢}{١٢}$ = ٢

∴ م . ح = {(٣ ، ١ ، ٢)}

تمرين (٥) : على حل نظام من المعادلات الخطية بطريقة كرامر

• أوجد مجموعة الحل بطريقة كرامر :

١) ٣س − ٥ص = ٨ ، س + ص = ٨

٢) ٢س − ٣ص = ٧ ، س + ص = −١

٣) ٢س + ٣ص = ٠ ، ٢س + ٦ص = ٠

٤) س − ٣ص = −٤ ، ٢س + ص = ٢

٥ س + ٢ص = ٠ ، ٢س − ٣ص = ١

٦ ٢س − ٣ص + ٥ع = ٧ ، ٣س + ٤ص + ٢ع = ١١ ، س − ٢ص + ٧ع = ١٦

٧ ٢س + ص − ع = −١ ، ٢س − ص + ٤ع = ١ ، ٥س − ٣ص + ٢ع = ٣

٨ ٢س + ص − ٢ع = ١٠ ، ٣س + ٢ص + ٢ع = ١ ، ٥س + ٤ص + ٣ع = ٤

٩ س + ٢ص − ٣ع = ٦ ، ٢س − ص − ٤ع = ٢ ، ٤س + ٣ص − ٢ع = ١٤

١٠ ص + ٢س + ٣ع = ٦ ، ٢س − ص + ع = −٣ ، س − ٢ص + ٢ع = −١١

درس ٦ المعكوس الضربى للمصفوفة

إذا كان لدينا المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ ، المصفوفة ب = $\begin{pmatrix} ٣ & -٥ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$

$$\because \begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ & -٥ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦-٥ & -١٠+١٠ \\ ٣-٣ & -٥+٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = I$$

بما أن الناتج I ∴ كل منهما معكوس ضربى للآخر .

المصفوفة أ معكوس ضربى لـ ب ، والمصفوفة ب معكوس ضربى لـ أ

سؤال : هل كل المصفوفات لها معكوس ضربى ؟

الجواب : بعض المصفوفات ليس لها معكوساً ضربياً ، لأن شرط وجود معكوس ضربى أن يكون محدد المصفوفة ≠ ٠

• كيفية إيجاد المعكوس :

بفرض أن المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{ء} \end{pmatrix}$ وبفرض أن أ^{-1} هو المعكوس الضربى للمصفوفة أ ، وأن محدد أ = Δ ≠ ٠ فإن : $\text{أ}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \text{ء} & -\text{ب} \\ -\text{جـ} & \text{أ} \end{pmatrix}$

• الخطوات : (١) بدلنا وضعى العنصرين من القطر الرئيسى .

(٢) تغيير إشارتى العنصرين فى القطر الآخر .

(٣) ضرب الناتج السابق × $\frac{1}{\Delta}$ حيث Δ هو محدد المصفوفة .

• مثال (١) : إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}$ أوجد أ^{-1}

الحل

$\because \Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix} = ١٥ - ٨ = ٧ \neq ٠$ ∴ المصفوفة لها معكوس ضربى .

$$\therefore \text{أ}^{-1} = \frac{١}{٧}\begin{pmatrix} ٥ & -٤ \\ -٢ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٥}{٧} & \frac{-٤}{٧} \\ \frac{-٢}{٧} & \frac{٣}{٧} \end{pmatrix}$$

• مثال (٢) : أوجد قيم أ التى تجعل للمصفوفة $\begin{pmatrix} \text{أ} & ٤ \\ ١٦ & \text{أ} \end{pmatrix}$ معكوساً ضربياً

الحل

$\because \Delta = \begin{vmatrix} \text{أ} & ٤ \\ ١٦ & \text{أ} \end{vmatrix} = \text{أ}^{٢} - ٦٤$ ضع Δ = ٠ ∴ $\text{أ}^{٢} - ٦٤ = ٠$

∴ $\text{أ}^{٢} = ٦٤$ ∴ أ = ±٨

∴ ٨ ، −٨ تجعلان المصفوفة ليس لها معكوس ضربى .

∴ عندما أ ∈ ح − {٨ ، −٨} يكون للمصفوفة المعطاة معكوساً ضربياً .

• حل معادلتين آنيتين باستخدام معكوس المصفوفة :

إذا كان لدينا معادلتين : $\text{أ}_{١}\text{س} + \text{ب}_{١}\text{ص} = \text{ك}_{١}$ ، $\text{أ}_{٢}\text{س} + \text{ب}_{٢}\text{ص} = \text{ك}_{٢}$

فإن المعادلتين يمكن كتابتهما على صورة مصفوفة واحدة هكذا **أ س = ج**

حيث أ = $\begin{pmatrix} \text{أ}_{١} & \text{ب}_{١} \\ \text{أ}_{٢} & \text{ب}_{٢} \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة المعاملات .

، س = $\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة المجاهيل ، ج = $\begin{pmatrix} \text{ك}_{١} \\ \text{ك}_{٢} \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة الثوابت

∵ أ س = ج بالضرب × أ^{-1} ∴ أ^{-1} أ س = أ^{-1} ج ∵ أ^{-1} أ = I

∴ س = أ^{-1} ج

• **مثال (٢) :** حل نظام المعادلتين الآتيتين باستخدام المصفوفات :

٣س + ٢ص = ٥ ، ٢س + ص = ٣

الحل

$\because$ أ $= \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$ ، س $= \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$ ، ج $= \begin{pmatrix} ٥ \\ ٣ \end{pmatrix}$

$\because \Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٣ - ٤ = -١$ $\therefore$ المصفوفة لها معكوس

$\therefore$ أ$^{-١} = \frac{١}{-١}\begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ ٣ & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ٢ \end{pmatrix}$ $\because$ س = أ$^{-١}$ ج

$\because$ س $= \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٥ \\ ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٥+٦ \\ ١٠-٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ١ \end{pmatrix}$

$\therefore$ س = ١ ، ص = ١ $\therefore$ م . ح = {(١ ، ١)}

تمرين (٦) : على المعكوس الضربى للمصفوفة

• **أوجد معكوس المصفوفات الآتية إن أمكن . من (١) إلى (١١) :**

❶ أ $= \begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ ❷ ب $= \begin{pmatrix} ٧ & ٥ \\ ٦ & ٤ \end{pmatrix}$ ❸ جـ $= \begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$.

❹ د $= \begin{pmatrix} ٤ & ٩ \\ ٥ & ١١ \end{pmatrix}$ ❺ هـ $= \begin{pmatrix} ٣ & ٩ \\ ٣ & ١٣ \end{pmatrix}$ ❻ و $= \begin{pmatrix} ٦ & ٧ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$

❼ ز $= \begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٤ & ٦ \end{pmatrix}$ ❽ ع $= \begin{pmatrix} -٢ & ٢ \\ ٧ & ٣ \end{pmatrix}$ ❾ س $= \begin{pmatrix} ٥ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$

❿ س $= \begin{pmatrix} ٤ & ٨ \\ ٨ & ١٦ \end{pmatrix}$ ⓫ ع $= \begin{pmatrix} ٥ & -٥ \\ ٢ & -٢ \end{pmatrix}$

⓬ أوجد قيم س التى تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} ٩ & \text{س} \\ \text{س} & ٤ \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربى .

⓭ أوجد قيم أ التى تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} ٣ & \text{أ} \\ \text{أ}-٢ & ١ \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربى .

⓮ إذا كان : أ × $\begin{pmatrix} ٠ & -٢ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix} = I$ أوجد المصفوفة أ

⓯ إذا كانت المصفوفة : س × $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ٢ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ فأوجد المصفوفة س

⓰ فإذا كان : ب = $\begin{pmatrix} -\text{س ص} & \text{س} \\ \text{ص} & ٠ \end{pmatrix}$ فأثبت أن : ب$^{-١}$ = $\begin{pmatrix} ١ & \frac{١}{\text{س}} \\ \frac{١}{\text{ص}} & ٠ \end{pmatrix}$

علمًا بأن س ص ≠ ٠ .

• **حل كل نظام من المعادلات الخطية التالية باستخدام المصفوفات . من (١٧) إلى (٢١) :**

⓱ ٣س + ٧ص = ٢ ، ٢س + ٥ص = ١

⓲ س + ٣ص = ٥ ، ٢س + ٥ص = ٨

⓳ ٤س + ٣ص = ٢٦ ، ٥س − ص = ٤

⓴ ٢س − ٧ص = ٣ ، س − ٣ص = ٢

㉑ ٢ص = ٥ − ٣س ، ٢س = ٣ − ص

㉒ إذا كان : ب = $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٨ & ٤ \end{pmatrix}$ ، أ ب = I فأوجد المصفوفة أ

㉓ إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} -٢ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ ، أ ب = $\begin{pmatrix} -٢ & ٤ \\ ٧ & ٠ \end{pmatrix}$ أوجد المصفوفة ب .

درس (١) حل متباينات الدرجة الأولى فى متغير واحد

• **تمهيد :** المتباينات التالية : س ≤ ٣ ، س < ٨ ، ٢س + ٩ > ٠ ، ٧ > ٢س - ٥ ، ٢س < ٣س - ٥ ≤ ٢س + ٣ تسمى متباينات من الدرجة الأولى فى متغير واحد (حيث س ∈ ح)

• **معنى حل المتباينة فى ح :** هو إيجاد مجموعة جزئية من ح بحيث يحقق كل عنصر من عناصر هذه المجموعة العلاقة المعطاة .

• **خواص علاقة > ، < فى ح :**

إذا كان : أ ≤ ب فإن :
- أ + جـ ≤ ب + جـ حيث جـ ∈ ح
- أ جـ ≤ ب جـ حيث جـ > ٠
- أ جـ ≥ ب جـ حيث جـ < ٠

إذا كان : أ ≥ ب فإن :
- أ + جـ ≥ ب + جـ حيث جـ ∈ ح
- أ جـ ≥ ب جـ حيث جـ > ٠
- أ جـ ≤ ب جـ حيث جـ < ٠

• **مثال (١) :** حل المتباينة : ٣س + ٤ < ١٠ ومثل الحل على خط الأعداد حيث س ∈ ح

الحل

٣س < ١٠ - ٤ ⟸ ٣س < ٦ بالقسمة على ٣

∴ س < ٢

∴ م . ح =]-∞ ، ٢[

• **مثال (٢) :** أوجد حل المتباينة : ٢س - ٥ ≤ ٤س - ٨ حيث س ∈ ح ومثل الحل على خط الأعداد

الحل

٢س - ٥ ≤ ٤س - ٨ ⟸ ٨ - ٥ ≤ ٤س - ٢س ⟸ ٣ ≤ ٢س

∴ بالقسمة على ٢

∴ $\frac{3}{2}$ ≤ س ⟸ س ≥ $\frac{3}{2}$

∴ م . ح = [$\frac{3}{2}$ ، ∞[

أو التمثيل

• **مثال (٢) :** أوجد الحل بطريقتين حيث س ∈ ح ومثل على خط الأعداد

س - ٢ < ٣س - ٤ ≤ س + ٤

الحـل

الطريقة الأولى : س - ٢ < ٣س - ٤ ≤ س + ٤ بإضافة (-س) لجميع الأطراف

∴ س - ٢ - س < ٣س - ٤ - س ≤ س + ٤ - س

∴ -٢ < ٢س - ٤ ≤ ٤ بإضافة (٤) لجميع الأطراف

∴ ٢ < ٢س ≤ ٨ (بالقسمة على ٢)

∴ ١ < س ≤ ٤ ∴ م . ح =]١ ، ٤]

التمثيل على خط الأعداد :

أو التمثيل :

الحل بالطريقة الثانية تقسم المتباينة إلى جزئين وتقسم الصفحة إلى نصفين

س - ٢ < ٣س - ٤	٣س - ٤ ≤ س + ٤
٤ - ٢ < ٣س - س	٣س - س ≤ ٨
٢ < ٢س ⟸ ∴ ١ < س	٢س ≤ ٨ ⟸ ∴ س ≤ ٤
∴ م . ح =]١ ، ∞[	∴ م . ح =]-∞ ، ٤]

∴ م . ح للمتباينة الأصلية هى تقاطع الحلين

=]١ ، ∞[∩]-∞ ، ٤] =]١ ، ٤] ∴ الحل على خط الأعداد

تمرين (١) : على حل متباينات الدرجة الأولى فى متغير واحد

أوجد مجموعة الحل فى ح لكل من المتباينات التالية ومثلها بيانيا :

❶ ٣س > ٣
❷ س + ٢ > ٥
❸ ٣س > -٢
❹ س - ٣ < -٥
❺ ٥س ≥ ٤
❻ ٣س ≥ ٧

٩ س − ١ ≤ ٣س − ٥

١٠ ١ > س − ٣ ≥ ٣

١١ −١ ≤ −س + ٢ ≤ ٢

١٢ −٣ > ٤س + ٥ ≥ ٧

١٣ س − ١ ≤ ٢س − ٥ > س + ٥

١٤ ٣س − ٦ > ٢س + ٦ ≥ ٣س + ١٨

١٥ ٢س − ٣ ≥ ٣س − ٥ > س − ٣

درس ٢ حل المتباينات للدرجة الأولى فى مجهولين (بيانيًا)

• **تمهيد :** رسم أى مستقيم على صورة : أس + ب ص = جـ

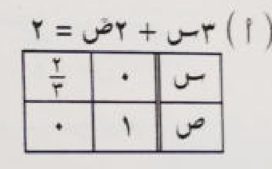
نأخذ س = ٠ ونوجد ص ثم نضع ص = ٠ ونوجد س المقابلة ونضع ذلك فى جدول

• **مثال (١) :** ارسم المستقيمات الآتية :

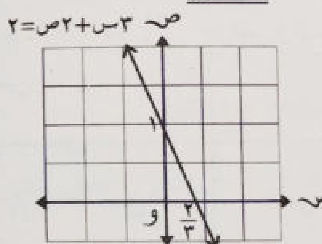
(أ) ٣س + ٢ص = ٢ (ب) ٢س − ص = ٠ (جـ) ص = ٢س + ٥

الحــل

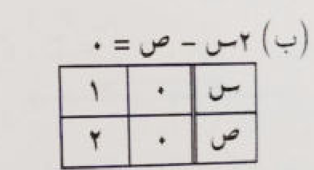
(أ) ٣س + ٢ص = ٢



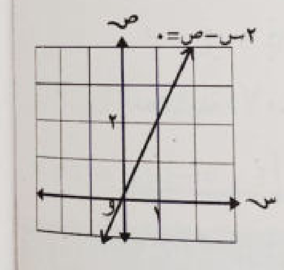
س	٠	$\frac{2}{3}$
ص	١	٠



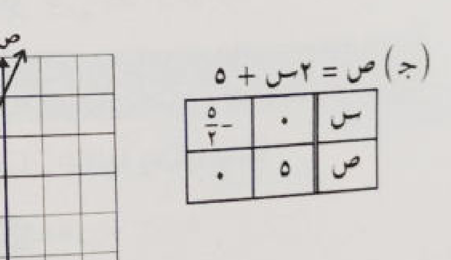
(ب) ٢س − ص = ٠



س	٠	١
ص	٠	٢



(جـ) ص = ٢س + ٥



س	٠	$-\frac{5}{2}$
ص	٥	٠

• **ملاحظة :**

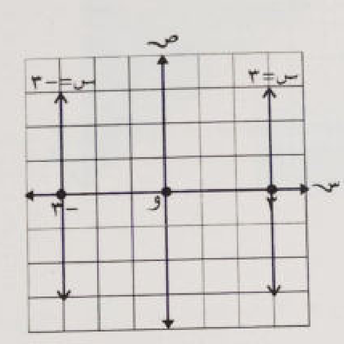
المستقيمات التى على صورة س = أ فهى توازى محور الصادات وتبعد عنه بمقدار أ

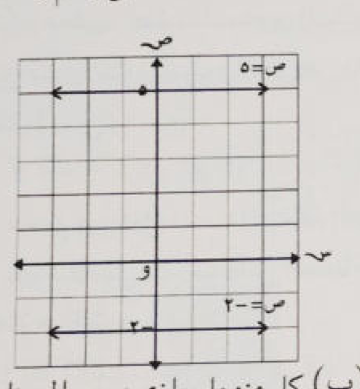
والمستقيمات التى على صورة ص = ب فهى توازى محور السينات وتبعد عنه بمقدار ب

• **مثال (٢) :** ارسم المستقيمات : (أ) س = ٣ ، س = −٣ فى رسم واحد

(ب) ص = ٥ ، ص = −٢ فى رسم واحد

الحــل





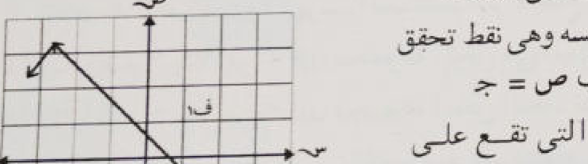
حل (أ) كل منهما يوازى محور الصادات | حل (ب) كل منهما يوازى محور السينات

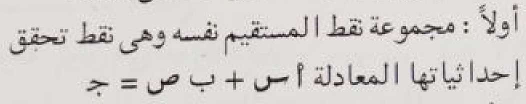
• **ملاحظة هامة :** أى مستقيم على صورة أس + ب ص = جـ يجزئ المستوى الديكارتى إلى ثلاثة مجموعات من النقط .

أولاً : مجموعة نقط المستقيم نفسه وهى نقط تحقق إحداثياتها المعادلة أس + ب ص = جـ

ثانيًا : مجموعة نقط المستوى التى تقع على إحدى جانبى المستقيم $ف_1$.

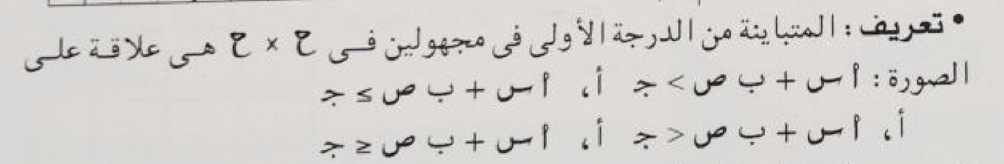
ثالثًا : مجموعة نقط المستوى التى تقع على الجانب الآخر للمستقيم $ف_2$.





• **تعريف :** المتباينة من الدرجة الأولى فى مجهولين فى ح × ح هى علاقة على الصورة : أس + ب ص > جـ أ، أس + ب ص ≤ جـ

أ، أس + ب ص < جـ أ، أس + ب ص ≥ جـ



• **مجموعة حل المتباينة من الدرجة الأولى فى مجهولين :** هى مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتى ح × ح أى مجموعة الأزواج المرتبة (س ، ص) التى تحقق المتباينة .

• **مثال (٣) :** مثل بيانيًا مجموعة حل المتباينة : ٣س + ٤ص > ١٢ فى ح × ح

طريقة الحل :

أولاً : نرسم المستقيم ٣س + ٤ص = ١٢ بخط متقطع

س	٠	٤
ص	٣	٠

ثانيًا : تحديد نصف المستوى الذى يمثل حل المتباينة وذلك بالتعويض بإحداثى نقطة الأصل (٠ ، ٠)

∵ ٣ × ٠ + ٤ × ٠ ≯ ١٢ ∴ ٠ ≯ ١٢

∴ مجموعة الحل ليست المنطقة التى تقع فيها نقطة الأصل ولذلك نظلل المنطقة الأخرى

• **ملاحظات :**

(١) إذا كانت المتباينة يوجد فيها (> أو <) يرسم المستقيم بخط متقطع .

(٢) إذا كانت المتباينة يوجد فيها (≤ أو ≥) يرسم المستقيم بخط متصل .

(٣) إذا وضع ≥ بدلا من > فإن مجموعة هى المنطقة ف١ ∪ مجموعة نقط المستقيم ٣س + ٤ص = ١٢ ويرسم المستقيم غير متقطع

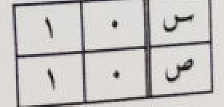
(٤) إذا وضع < بدلاً من > فإن مجموعة الحل هى المنطقة ف٢

(٥) إذا وضع ≤ بدلاً من > فإن مجموعة الحل اتحاد نصف المستوى ف٢ مضافًا إليه نقط المستقيم ل نفسه ويرسم المستقيم غير متقطع .

• **مثال (٢) :** مثل بيانيًا مجموعة حل المتباينة : ص − س ≥ ٠

الحل

أولاً : نرسم المستقيم ل الذى معادلته ص − س = ٠



س	٠	١
ص	٠	١

يرسم المستقيم متصل

ثانيًا : ∵ المستقيم ص − س = ٠ يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠)

لذا نختار نقطة أخرى غير نقطة الأصل ولتكن النقطة (٢ ، ٠) ثم نعوض فى طرفى المتباينة فنجد أن : ٠ − ٢ ≥ ٠ ∴ (٢ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة .

ثالثًا : مجموعة الحل هى اتحاد نصف المستوى ف١ مضافًا إليه نقط المستقيم ل نفسه .

• **ملاحظات :**

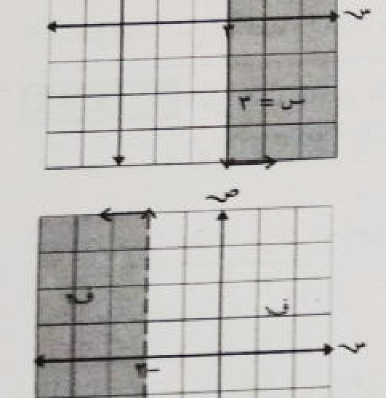
(١) حل المتباينة : ص − س > ٠ هى نصف المستوى ف١ فقط .

(٢) حل المتباينة : ص − س < ٠ هى نصف المستوى ف٢ .

(٣) حل المتباينة : ص − س ≤ ٠ هى اتحاد نصف المستوى ف٢ مضافًا إليه نقط المستقيم ل .

• **مثال (٣) :** حل المتباينة : (أ) س ≤ ٣ ، (ب) س < −٢ حيث مجموعة الحل فى ح × ح

الحل



∵ س = ٣ هو مستقيم يوازى محور الصادات كما بالرسم

∵ (٠ ، ٠) ∉ مجموعة الحل لأن ٠ ≱ ٣

∴ مجموعة الحل هى منطقة ف١ مع نقط المستقيم س = ٣

• **لاحظ :** إن مجموعة حل س ≥ ٣ هى ف٢ مع نقط المستقيم س = ٣

(ب) س = −٢ هو مستقيم يوازى محور الصادات كما بالرسم ويرسم المستقيم متقاطع لأن س < −٢

∵ (٠ ، ٠) ∉ مجموعة الحل لأن ٠ ≮ −٢

∴ مجموعة الحل هى ف١

• **لاحظ :** إن مجموعة حل س > −٢ هى ف١

تمرين (٢) : على حل المتباينات للدرجة الأولى فى مجهولين (بيانيا)

مثل بيانيًا مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية مجموعة الحل فى ح × ح

١ س < ٣   ٢ ص ≥ ١   ٣ ص < −٣

٤ س − ص < ٠ ٥ س − ص < ٥ ٦ س + ص < ١

٧ س + ص ≤ ٤ ٨ ٢س + ٣ص < ٦ ٩ ٢س + ٥ص < ١٠

١٠ ٥س − ٣ص < ٠ ١١ ٣س + ٤ص ≤ ٠

١٢ $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} < ١$ ١٣ $\frac{٣س}{٢} - \frac{٢ص}{٣} < ١$

١٤ $\frac{س}{٢} - ٣ \le ص$ ١٥ $ص \le ٢ - \frac{س}{٣}$

درس ٣ الحل البيانى لمتباينتين أو أكثر من الدرجة الأولى فى مجهولين

لإيجاد الحل البيانى لمتباينتين نتبع الخطوات التالية :

(١) نوجد أو نظلل نصف المستوى الممثل لمجموعة حل المتباينة الأولى .

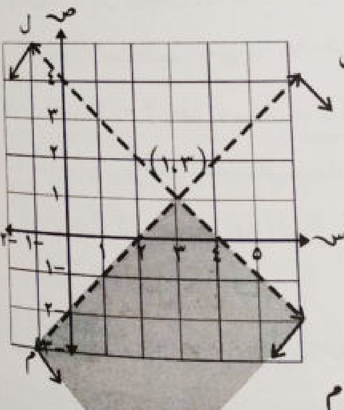
(٢) نوجد أو نظلل نصف المستوى الممثل لمجموعة حل المتباينة الثانية .

(٣) مجموعة حل المتباينتين هى المنطقة المشتركة بين هاتين المنطقتين .

• **ملحوظة :** من الأفضل إيجاد نقطة تقاطع المستقيمين الممثلين لهذين المتباينتين

• **مثال (١) :** مثل بيانيًا مجموعة حل المتباينتين : س + ص < ٤ ، س − ص < ٢ فى ح × ح

الحــل



أولاً : نرسم المستقيم س + ص = ٤ متقطعًا وليكن ل

س	٠	٤
ص	٤	٠

∵ (٠ ، ٠) ∈ حل المتباينة س + ص < ٤

لأن ٠ < ٤ ∴ منطقة الحل لهذه المتباينة هى المنطقة التى تقع فيها نقطة الأصل

ثانيًا : نرسم المستقيم : س − ص = ٢ متقطعًا وليكن م

س	٠	٢
ص	−٢	٠

∵ (٠ ، ٠) لا تحقق المتباينة (٠ ≮ ٢) ∴ منطقة الحل لا تقع فيها نقطة الأصل

نقطة التقاطع للمستقيمين : س + ص = ٤ ، س − ص = ٢ هى (٣ ، ١)

• **ملحوظة :** المنطقة المظللة هى مجموعة الحل للمتباينتين

مجموعة كلٍ من نقط المستقيمين لا تنتمى إلى الحل

• **مثال (٢) :** مثل بيانيًا مجموعة حل المتباينتين فى ح × ح :

٤س − ٥ص ≤ −١٠ ، ص + ٢ ≥ ٠

الحــل

أولاً : نرسم المستقيم ص = −٢ وليكن ك وهو متصل وهو مستقيم يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، −٢) ∵ (٠ ، ٠) تحقق المتباينة

ص ≥ −٢ لأن ٠ ≥ −٢

∴ مجموعة حل المتباينة تقع فيها نقطة الأصل

ثانيًا : نرسم المستقيم : ٤س − ٥ص = −١٠

غير متقطع وليكن ل وواضح أن نقطة الأصل (٠ ، ٠) تحقق المتباينة

س	٠	$-\frac{٥}{٢}$
ص	٢	٠

∴ نقطة تقاطع المستقيمين (−٥ ، −٢) الجزء المظلل هو مجموعة حل المتباينتين

• **مثال (٣) :** أوجد مجموعة حل المتباينات الآتية :

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٢س + ص < ٢ ، س + ٢ص ≤ ٣

الحــل

نرسم المستقيمات : $ل_١$: س = ٠

وهو محور الصادات ومجموعة حل س ≥ ٠

$ل_٢$: ص = ٠

وهو محور السينات ومجموعة حل ص ≥ ٠

$ل_٣$: ٢س + ص = ٢ وهو خط متقطع

س	٠	١
ص	٢	٠

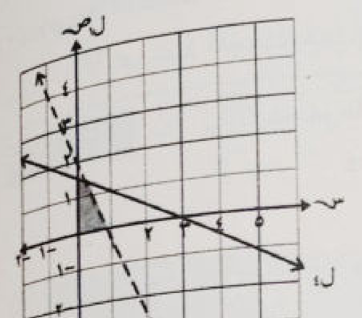
(٠ ، ٠) ∈ مجموعة الحل لأن ٠ < ٢

ل٤ : س + ٢ص = ٣ خط غير متقطع

س	٠	٣
ص	$\frac{٣}{٢}$	٠

(٠ ، ٠) ∈ مجموعة الحل لأن ٠ ≥ ٢

نجمع كل ذلك فى شكل واحد :



الجزء المظلل هو مجموعة حل المتباينات معًا

نقطة تقاطع المستقيمين هى ($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٤}{٣}$)

• ملحوظة هامة : س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠

تعنى أن مجموعة الحل تقع فى الربع الأول

تمرين (٣) : على الحل البيانى لمتباينتين أو أكثر

• مثل بيانيًا مجموعة حل كل من المتباينتين الآتيتين (مجموعة الحل فى ح × ح):

١ س − ص > ١ ، س + ص > ٣

٢ ٢س − ص > −٣ ، س + ص > ١

٣ س + $\frac{٣}{٤}$ص > −٣ ، س − $\frac{٢}{٥}$ص > −١

٤ س − ص > ٠ ، ٢س + ص > ٥

٥ س + ص > ٣ ، س > ص − ١

٦ ٢س − ٥ص ≤ −٢ ، ص > −٢

٧ ص ≤ س − ٢ ، ص ≥ ٢س + ٤

٨ ٢س + ص > ٥ ، ص ≤ ٠

٩ س > ٣ + ٢ص ، س ≥ ٠

١٠ ص > ٢ ، س + ص ≤ −٢

• أوجد مجموعة حل المتباينات الآتية بيانيًا (مجموعة الحل فى ح × ح):

١١ س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، س + ٢ > ص ، ص + ٢س > ٤

١٢ س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، س + ص ≥ ٤

١٣ س ≤ −٢ ، ص ≥ ٥ ، س − ص ≥ ٣

١٤ س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، ٣س + ٢ص > ٦ ، س + ص ≤ ٢

درس ٤ البرمجة الخطية

البرمجة الخطية : من العلوم الحديثة وهى فى نفس الوقت عملية إيجاد الحل الأمثل لمشكلة ما باستخدام الطرق الرياضية .

فالقيود والإمكانيات الموجودة فى المشكلة أو التى تفرضها طبيعة المشكلة تتحول إلى متباينات والهدف يتحول إلى دالة يسمى **دالة الهدف** وهى فى الغالب أكبر قيمة لربح معين أو أقل قيمة لتكاليف معينة .

• مثال (١) : المتباينات التالية هى قيود وإمكانيات مشكلة ما :

س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، ٢س + ٣ص ≥ ١٢ ، س + ص ≥ ٥

وإذا كانت دالة الهدف ر(س ، ص) = ٣س + ٤ص أوجد أكبر قيمة لدالة الهدف

الحـل

س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ يدلان معًا على أن الحلول فى الربع الأول فى المستوى الديكارتى

نرسم المستقيم : ٢س + ٣ص = ١٢

يرسم متصلاً ونرمز له بالرمز م

س	٠	٦
ص	٤	٠

(٠ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة ٢س + ٣ص ≥ ١٢

والمستقيم س + ص = ٥

يرسم متصلاً ونرمز له بالرمز ل

س	٠	٥
ص	٥	٠

(٠ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة س + ص ≥ ٥

نقطة تقاطع المستقيمين : ٢س + ٣ص = ١٢ ، س + ص = ٥ هي (٣ ، ٢)

منطقة حل المتباينات معاً يمثلها المضلع المظلل أ ب جـ ء ويسمى مضلع الحل، أ ، ب ، جـ ، ء هي رؤوس مضلع الحل وتوجد أكبر قيمة لدالة الهدف أو أصغر قيمة من خلال هذه الرؤوس

∴ م(٣ ، ٢) = ٣ × ٣ + ٤ × ٢ = ١٧ (أكبر قيمة) لدالة الهدف

م(٥ ، ٠) = ٥ × ٣ + ٤ × ٠ = ١٥

م(٠ ، ٠) = ٠ × ٣ + ٤ × ٠ = ٠ (أصغر قيمة) لدالة الهدف

م(٠ ، ٤) = ٣ × ٠ + ٤ × ٤ = ١٦

تمرين (٤) : على البرمجة الخطية

عين مجموعة حل المتباينات الآتية بيانيا فى المستوى ح × ح ثم عين من مجموعة الحل قيم س ، ص التى تجعل من دالة الهدف أكبر ما يمكن أو أصغر ما يمكن:

❶ س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س ≥ ٢ص ، س + ص ≤ ٩٠

ودالة الهدف : م(س ، ص) = ٥س + ٧ص

❷ س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٣ص ≥ ٦ ، ٣س + ٤ص ≥ ١٢

ودالة الهدف : م(س ، ص) = ٥س + ١٠ص

❸ س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٨ص ≤ ٣٢ ، ١٢س + ٨ص ≤ ١٢٠

ودالة الهدف : م(س ، ص) = ٢٥س + ٤٥ص

❹ س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٣ص + ٢س ≥ ٦ ، ٢س + ص ≤ ١٠

ودالة الهدف : م(س ، ص) = ٢س + ٣ص + ٥

❺ -٣ ≤ س ≤ ٣ ، -٤ ≤ ص ≤ ٤

٤س + ٣ص ≤ ١٢ ، ٤س + ٣ص ≥ -١٢

ودالة الهدف : ل = س + ٣ص - ٥

- **مثال على البرمجة الخطية الكلامية :**

ينتج مصنع رولات ورق حائط وعلب الغراء اللازمة لصقه فإذا كان إنتاج كل ١٠٠ رول ورق يكلف المصنع ١٥٠٠ جنيه ويتطلب ١٢ ساعة عمل وإنتاج كل ١٠٠ علبة غراء يكلف المصنع ٢٠٠٠ جنيه ويتطلب ٨ ساعات عمل وعلمت أن المصنع يعمل أسبوعيا ٣٦٠ ساعة ويرصد مبلغ ٦٠٠٠٠ جنيها للتكاليف اللازمة ويقدر ربحاً قدره ٣٠٠ جنيها لكل ١٠٠ رول ورق وكذا ٣٠٠ جنيهاً لكل ١٠٠ علبة غراء . فما هو الإنتاج الإسبوعي من كل نوع اللذين يضمن للمصنع أكبر ربح ممكن .

الحـــل

المتطلبات / النوع	ورق الحائط	الغراء	المتاح
تكاليف	١٥٠٠	٢٠٠٠	٦٠٠٠٠
الساعات	١٢	٨	٣٦٠
الفروض	س	ص	س لكل ١٠٠ ، ص لكل ١٠٠

الحدود : س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ١٢س + ٨ص ≤ ٣٦٠ ، ١٥٠٠س + ٢٠٠٠ص ≤ ٦٠٠٠٠

دالة الهدف : م(س ، ص) = ٣٠٠س + ٣٠٠ص

المتباينة الأولى تصبح

١٢س + ٨ص = ٣٦٠ بالقسمة على ٤

٣س + ٢ص = ٩٠

ونرمز له بالرمز ل ∵ (٠ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة

س	٠	٣٠
ص	٤٥	٠

المتباينة الثانية :

١٥٠٠س + ٢٠٠٠ص = ٦٠٠٠٠ (بالقسمة على ٥٠٠)

∴ ٣س + ٤ص = ١٢٠

س	٠	٤٠
ص	٣٠	٠

(٠ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة ، نقطة تقاطع المستقيمين (٢٠ ، ١٥)

رءوس مضلع الحل هى (٠ ، ٠) ، (٣٠ ، ٠) ، (٢٠ ، ١٥) ، (٠ ، ٣٠)

ر(٠ ، ٣٠) = ٠ + ٣٠٠ × ٣٠ = ٩٠٠٠ ،

ر(٢٠ ، ١٥) = ٣٠٠ × ٢٠ + ٣٠٠ × ١٥ = ١٠٥٠٠

∴ أكبر قيمة عند (٢٠ ، ١٥) وهى ١٠٥٠٠

∴ عدد رول الورق = ٢٠ × ١٠٠ = ٢٠٠٠ رول

عدد علب الغراء = ١٥ × ١٠٠ = ١٥٠٠ علبة غراء

تمرين (٥) : على المسائل الكلامية على البرمجة الخطية

١ مصنع لإنتاج زيوت الطلاء والورنيش يستخدم لذلك ماكينتين أ ، ب بحيث تعمل الماكينة أ لمدة ١٢٠ ساعة أسبوعيًا وتعمل الماكينة ب لمدة ١٤٠ ساعة أسبوعيًا فإذا كان إنتاج الكيلو جرام من زيوت الطلاء تتطلب تشغيل كل من الماكينتين (كل على حدة) لمدة $٢\frac{١}{٢}$ ساعة وإنتاج الكيلو جرام الواحد من الورنيش يتطلب تشغيل الماكينة أ لمدة ٤ ساعات وتشغيل الماكينة ب لمدة ٥ ساعات فإذا علمت أن إدارة المصنع تتوقع ربحًا قدره ٣ جنيهات لكل كجم من الزيت ، ٥ جنيهات لكل كجم من الورنيش ما هو البرنامج الذى يجب تخطيطه ليكون الربح المناظر محققًا لأكبر ربح ممكن .

٢ ينتج مصنع موبيليات نوعين من المناضد (سفرة ومطبخ) ويستخدم لذلك ماكينتين أ ، ب فإذا كان إنتاج منضدة السفرة يتطلب تشغيل الماكينة أ لمدة ساعة والماكينة ب لمدة ٣ ساعات ، وكان إنتاج منضدة المطبخ يتطلب تشغيل الماكينة أ لمدة ساعتين والماكينة ب لمدة ساعة وعلمت أن الماكينة أ يمكن أن تعمل ٩٠ ساعة أسبوعيًا والماكينة ب يمكن أن تعمل لمدة ١٥٠ ساعة أسبوعيًا وأن الربح المنتظر من منضدة السفرة يعادل ٢٠٠ جنيهًا ، والربح المنتظر من منضدة المطبخ يعادل ١٠٠ جنيهًا ، أوجد إنتاج المصنع ليحقق أكبر ربح ممكن.

٣ يمتلك أحد صناع الأثاث ١٦ وحدات من الخشب ، ٤٨ ساعة من الوقت يستغلها فى صنع طرازين من الأثاث ويحتاج الطراز الأول إلى وحدتين من الخشب ، ٦ ساعات عمل ويحتاج الطراز الثانى إلى وحدة واحدة من

الخشب ، ٨ ساعات عمل . فإذا كان ثمن بيع الوحدة من الطراز الأول ١٢٠٠ جنيه وثمن بيع الوحدة من الطراز الثانى ٨٠٠ جنيه ، فكم عدد الوحدات من كل طراز يجب أن يقوم بتصنيعها إذا أراد أكبر عائد من المبيعات ؟

٤ ترزى لديه ٦٠ مترًا من الصوف ، ٢٤ مترًا من القماش اللازم للحشو والبطانة الداخلية لبدل وبلاطى الرجال . فإذا كانت البدلة تحتاج إلى ٣ متر من الصوف ، متر واحد من قماش الحشو ويحتاج البالطو إلى ٢٫٥ متر من الصوف ، ١٫٥ متر من قماش الحشو فحدد عدد البدل والبلاطى التى يجب أن يقوم بتفصيلها هذا الترزى بحيث يحصل على أكبر عائد ممكن فى كل حالة فيما يلى : (أولاً) إذا باع البدلة بسعر ١٨٠ جنيهًا والبالطو بسعر ١٥٠ جنيهًا .
(ثانيًا) إذا باع كل من البدلة والبالطو بسعر ٢٠٠ جنيهًا .

٥ يرغب مدير إحدى حدائق الحيوان فى إطعام حيواناته بأقل تكلفة ممكنة بأن يشترى لهم مالا يقل عن ١٢٠ كجم من البروتينات وعن ٩٠ كجم من الفيتامينات. تقدمت له إحدى الشركات بعطاء لمادتين غذائيتين أ ، ب مجهزتين فى أكياس حسب المواصفات الآتية : فى كيس من النوع أ يحتوى على ٣ كجم بروتين ، ٣ كجم فيتامين . وبسعر ١٠ جنيهات لكل كيس ، وكل كيس من النوع ب يحتوى على ٢ كجم بروتين ، ١ كجم فيتامين وبسعر ٥ جنيهات لكل كيس . كم كيس من كل نوع يمكن أن يشتريها كل يوم وكم يكلفه ذلك ؟

٦ تنتج شركة صناعية نوعية من المنتجات وتستخدم فى إنتاج كل منها نوعين من الآلات آلة (أ) وآلة (ب) وتحتاج وحدة المنتج الأولى إلى $\frac{٣}{٤}$ ساعة تشغيل على الآلة (أ) ، $\frac{١}{٤}$ ساعة تشغيل على الآلة (ب) ، وتحتاج وحدة المنتج الثانى إلى $\frac{١}{٤}$ ساعة تشغيل على الآلة (أ) ، $\frac{١}{٣}$ ساعة تشغيل على الآلة (ب) . فإذا فرض أن الحد الأقصى لفترة تشغيل الآلة (أ) فى اليوم هو ١٢ ساعة وبالنسبة للآلة (ب) هو ١٠ ساعات فى اليوم وعلم أن الوحدة من المنتج الأول تدر ربحًا للشركة قدره ستة جنيهات وأن الوحدة من المنتج الثانى تدر ربحًا للشركة قدره ٥ جنيهات . حدد برنامج الإنتاج الأمثل الذى يحقق للشركة أكبر ربح ممكن .

ثانيًا

حساب المثلثات



درس ١ المتطابقات المثلثية

• الفارق بين مفهومى المعادلة والمتطابقة :

• **المعادلة :** هى متساوية صحيحة لبعض الأعداد الحقيقة التى تحقق هذه المتساوية .

فمثلاً : حا $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ حيث $\theta \in]0 , 2\pi[$

القيم التى تحقق هذه المتساوية هى : $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$ ، $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$ فقط

ولذلك تسمى هذه المتساوية معادلة .

• **المتطابقة :** هى متساوية صحيحة لجميع قيم المتغير الحقيقية .

فمثلاً : حا $(\frac{\pi}{2} ، \theta)$ = حتا θ هى متطابقة على أساس أن المتغير θ يأخذ أى قيمة فتحقق المتساوية ، فلذا هى تسمى متطابقة .

• المتطابقات المثلثية الأساسية:

أولاً : الدوال الأساسية ومقلوباتها :

(١) حا θ × حتا $\theta = 1$ ⇐ حا $\theta = \frac{1}{\text{قتا } \theta}$ ، قتا $= \frac{1}{\text{حا } \theta}$

(٢) حتا θ قا $\theta = 1$ (٣) طا θ طتا $\theta = 1$

ثانيًا : الدوال المثلثية للزاويتين المتتامتين :

(١) حا $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ = حتا θ (٢) حتا $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ = حا θ

(٣) طا $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ = طتا θ (٤) قتا $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ = قا θ

(٥) قا $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ = قتا θ (٦) طا $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ = طتا θ

ثالثًا : متطابقة الزاويتين θ ، $-\theta$:

حا $(-\theta)$ = −حا θ ، قتا $(-\theta)$ = −قتا θ ، طا $(-\theta)$ = −طا θ ، طتا $(-\theta)$ = −طتا θ

لكن مع : حتا $(-\theta)$ = حتا θ ، قا $(-\theta)$ = قا θ

رابعًا : متطابقات فيثاغورث :

(١) العلاقة الأساسية هى : حا$^2\theta$ + حتا$^2\theta = 1$ ⟵ (١)

بقسمة طرفى العلاقة (١) على حا$^2\theta$ ∴ $1 +$ طا$^2\theta$ = قا$^2\theta$ ⟵ (٢)

وبقسمة طرفى العلاقة (١) على $\text{حتا}^2\theta$ $\quad \therefore ١ + \text{طتا}^2\theta = \text{قتا}^2\theta \longleftarrow (٣)$

خامسًا : $\text{طا}\,\theta = \dfrac{\text{حا}\,\theta}{\text{حتا}\,\theta}$ ، $\text{طتا}\,\theta = \dfrac{\text{حتا}\,\theta}{\text{حا}\,\theta}$

• **ملحوظة هامة :** المجموعات الخمسة السابقة تعتبر أمثلة كمتطابقات مثلثية .

أمثلة محلولة

مثال محلول (١) : أثبت أن طا هـ + طتا هـ = قا هـ قتا هـ

الحل

$$\text{الأيمن} = \frac{\text{حا هـ}}{\text{حتا هـ}} + \frac{\text{حتا هـ}}{\text{حا هـ}} = \frac{\text{حا}^2\text{ هـ} + \text{حتا}^2\text{ هـ}}{\text{حا هـ حتا هـ}} = \frac{١}{\text{حا هـ حتا هـ}}$$

$$= \frac{١}{\text{حا هـ}} \times \frac{١}{\text{حتا هـ}} = \text{قا هـ قتا هـ} = \text{الأيسر}$$

مثال محلول (٢) :

أثبت أن : (حا هـ + حتا هـ) (طا هـ + طتا هـ) = قا هـ + قتا هـ

الحل

$$\text{الأيمن} = (\text{حا هـ} + \text{حتا هـ})\left(\frac{\text{حا هـ}}{\text{حتا هـ}} + \frac{\text{حتا هـ}}{\text{حا هـ}}\right)$$

$$= (\text{حا هـ} + \text{حتا هـ})\left(\frac{\text{حا}^2\text{ هـ} + \text{حتا}^2\text{ هـ}}{\text{حا هـ حتا هـ}}\right)$$

$$= (\text{حا هـ} + \text{حتا هـ})\left(\frac{١}{\text{حا هـ حتا هـ}}\right)$$

$$= \frac{\text{حا هـ}}{\text{حا هـ حتا هـ}} + \frac{\text{حتا هـ}}{\text{حا هـ حتا هـ}}$$

$$= \frac{١}{\text{حتا هـ}} + \frac{١}{\text{حا هـ}} = \text{قا هـ} + \text{قتا هـ} = \text{الأيسر}$$

مثال محلول (٣) : أثبت أن : $\dfrac{٢\text{طتا جـ}}{١ + \text{طتا}^2\text{ جـ}} = ٢\text{حا جـ حتا جـ}$

الحل

$$\text{الأيمن} = \frac{\dfrac{٢\text{حتا جـ}}{\text{حا جـ}}}{\text{قتا}^2\text{ جـ}} = \frac{٢\text{حتا جـ}}{\text{حا جـ}} \times \text{حا}^2\text{ جـ} = ٢\text{حا جـ حتا جـ} = \text{الأيسر}$$

مثال محلول (٤) : أثبت أن : $\dfrac{\text{طا هـ} - \text{طتا هـ}}{\text{طا هـ} + \text{طتا هـ}} = ٢\text{حا}^2\text{ هـ} - ١$

الحل

$$\text{الأيمن} = \frac{\dfrac{\text{حا هـ}}{\text{حتا هـ}} - \dfrac{\text{حتا هـ}}{\text{حا هـ}}}{\dfrac{\text{حا هـ}}{\text{حتا هـ}} + \dfrac{\text{حتا هـ}}{\text{حا هـ}}} = \frac{\dfrac{\text{حا}^2\text{ هـ} - \text{حتا}^2\text{ هـ}}{\text{حا هـ حتا هـ}}}{\dfrac{\text{حا}^2\text{ هـ} + \text{حتا}^2\text{ هـ}}{\text{حا هـ حتا هـ}}}$$

$$= \text{حا}^2\text{ هـ} - \text{حتا}^2\text{ هـ} = \text{حا}^2\text{ هـ} - (١ - \text{حا}^2\text{ هـ})$$

$$= \text{حا}^2\text{ هـ} - ١ + \text{حا}^2\text{ هـ} = ٢\text{حا}^2\text{ هـ} - ١ = \text{الأيسر}$$

مثال محلول (٥) : أثبت أن : $\dfrac{٢\text{حا}^3\text{ هـ} - \text{حا هـ}}{\text{حتا هـ} - ٢\text{حتا}^3\text{ هـ}} = \text{طا هـ}$

الحل

$$\text{الأيمن} = \frac{\text{حا هـ}(٢\text{حا}^2\text{ هـ} - ١)}{\text{حتا هـ}(١ - ٢\text{حتا}^2\text{ هـ})} = \frac{\text{حا هـ}(٢(١ - \text{حتا}^2\text{ هـ}) - ١)}{\text{حتا هـ}(١ - ٢\text{حتا}^2\text{ هـ})}$$

$$= \frac{\text{حا هـ}(٢ - ٢\text{حتا}^2\text{ هـ} - ١)}{\text{حتا هـ}(١ - ٢\text{حتا}^2\text{ هـ})}$$

$$= \frac{\text{حا هـ}(١ - ٢\text{حتا}^2\text{ هـ})}{\text{حتا هـ}(١ - ٢\text{حتا}^2\text{ هـ})} = \text{طا هـ} = \text{الأيسر}$$

تمرين (١) : على المتطابقات المثلثية

• **مجموعة (أ) :**

١ أى من العلاقات الآتية تمثل معادلة وأيهما تمثل متطابقة :

[أ] $\text{حا}\,\theta = \frac{١}{٢}$ [ب] $\text{حتا}\,\theta = \frac{١}{٢}$

[جـ] $\text{حتا}\,\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ [ء] $\text{طا}\left(\frac{٣\pi}{٢} + \theta\right) = -\text{طتا}\,\theta$

[هـ] حا$(\pi - \theta)$ = حا θ

[ز] قا$\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ = قتا θ

٢ ضع فى أبسط صورة :

[أ] (حا θ + حتا θ)^2 − ٢حا θ حتا θ [ب] $\frac{\text{١ + طا}^2\theta}{\text{١ + طتا}^2\theta}$

[جـ] $\frac{1}{\text{حتا}^2\theta} - \frac{1}{\text{طتا}^2\theta}$ [ء] حتا$\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ قا$\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

[هـ] $\frac{\text{حا}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\text{حتا}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$ [و] طا θ قتا θ حا$\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

[ز] $\frac{\text{حا}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\text{حتا}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} - \frac{\text{حا}\theta}{\text{حتا}(\pi - \theta)}$ [ح] $\frac{\text{حا}(\pi - \theta)}{\text{حتا}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} + \frac{\text{حا}^2\theta}{\text{١ − حتا}^2\theta}$

[ط] حا θ قا θ طتا θ + قتا θ طا θ حتا θ

٣ أثبت صحة المتطابقات التالية :

[أ] $\frac{\text{١ + طتا}^2\theta}{\text{١ + طا}^2\theta}$ = طتا^2 θ [ب] $\frac{\text{طا}\theta\text{ + طتا}\theta}{\text{قا}\theta\text{ + قتا}\theta}$ = ١

[جـ] (قا θ − طا θ)^2 = $\frac{\text{١ − حا}\theta}{\text{١ + حا}\theta}$ [ء] $\frac{(\text{١−حا}^2\theta)(\text{١−حتا}^2\theta)}{\text{طا}^2\theta}$ = حتا$^4\theta$

[هـ] $\frac{\text{حا}\theta\text{ حتا}\theta}{\text{طا}\theta} + \frac{\text{قا}\theta}{\text{قا}\theta\text{ قتا}\theta}$ = ١

• مجموعة (ب) :

١ $\frac{\text{حتا}^4\text{ جـ − حا}^4\text{ جـ}}{\text{حتا جـ − حا جـ}}$ = حتا جـ + حا جـ

٢ حتا^4 جـ + حا^2 جـ = حتا^2 جـ + حا^4 جـ

٣ قتا^2 جـ + قا^2 جـ = قتا^2 جـ قا^2 جـ

٤ (طا س + طتا س)^2 = قا^2 س + قتا^2 س

٥ حا ب طا ب = $\frac{\text{١ − حتا}^2\text{ ب}}{\text{حتا ب}}$

٦ طتا س + طا س = قا س قتا س

٧ $\frac{1}{\text{طا}^2\text{ أ}} + 1 = \frac{1}{\text{حا}^2\text{ أ}}$

٨ ١ − طا^4 جـ = ٢قا^2 جـ − قا^4 جـ

٩ $\frac{\text{حا}^3\text{ س + حتا}^3\text{ س}}{\text{حا س + حتا س}} + \frac{\text{حا}^3\text{ س − حتا}^3\text{ س}}{\text{حا س - حتا س}}$ = ٢

١٠ طا^2 جـ − طا^2 ء = $\frac{\text{حا}^2\text{ جـ − حا}^2\text{ ء}}{\text{حتا}^2\text{ جـ . حتا}^2\text{ ء}}$

١١ طتا أ ÷ قا أ قتا أ = ١ − حا^2 أ

درس ٢ حل المعادلات المثلثية

• مثال (١) : أوجد مجموعة الحل للمعادلة : حا س = $\frac{1}{2}$ حيث ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°
ثم أوجد الحل العام لهذه المعادلة .

الحل

∵ الزاوية الحادة التى جيبها = $\frac{1}{2}$ هى ٣٠°

∵ الجيب موجب ∴ الزاوية س تقع فى الربع الأول أو الربع الثانى .

∴ س = ٣٠° أ، س = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠° حيث س ∈]٠ ، ٣٦٠°[

∴ م . ح = $\{\frac{\pi}{6} ، \frac{5\pi}{6}\}$

• **الحل العام :** نضيف لكل ناتج ٢πن حيث ن ∈ ص

∴ مجموعة الحل العام : $\{\frac{\pi}{6}$ + ٢πن ، $\frac{5\pi}{6}$ + ٢πن$\}$

• مثال (٢) : أوجد مجموعة الحل للمعادلة : حتا θ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ فى $0 < \theta < 2\pi$
ثم أوجد الحل العام لهذه المعادلة .

الحـــل

∵ الزاوية الحادة التى جيب تمامها $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ هى ٤٥° = $\frac{\pi}{٤}$

∴ حتا (موجبة) ∴ الزاوية تقع فى الربع الأول أو الرابع .

∴ θ = $\frac{\pi}{٤}$ ، θ = ٣٦٠° − ٤٥° = ٣١٥° = $\frac{٧}{٤}\pi$

∴ م . ح = {$\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٧\pi}{٤}$}

• **ملحوظة هامة :** ٣١٥° تكافئ −٤٥° ∴ م . ح = {$\frac{\pi}{٤}$ ، −$\frac{\pi}{٤}$}

• **الحل العام :** نضيف لكل ناتج ٢πن

∴ مجموعة الحل العام : {±$\frac{\pi}{٤}$ + ٢πن} حيث ن ∈ ص

• **ملحوظة :** الحل العام يمكن أن يكون : $\frac{\pi}{٤}$ + ٢πن أو $\frac{٧}{٤}\pi$ + ٢πن

• **مثال (٣) :** أوجد مجموعة الحل للمعادلة : طا θ = $\sqrt{٣}$ حيث ٠ ≤ θ ≤ ٢π

ثم أوجد الحل العام لهذه المعادلة .

الحـــل

∵ θ = طا$^{-١}$ $\sqrt{٣}$ ∴ θ = $\frac{\pi}{٣}$ ∵ طا (موجبة) فى الربع الأول والثالث .

∴ م . ح فى [٠ ، ٢π] هى $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{\pi}{٣}$ + π = $\frac{٤}{٣}\pi$

• **الحل العام :** نضيف للناتج الأول فقط πن وهى مع الطا ، طتا

∴ الحل العام : $\frac{\pi}{٣}$ + πن

• **مثال (٤) :** أوجد مجموعة حل المعادلة : طا θ = ٢حا θ حيث θ ∈ [٠ ، ٣٦٠°]

الحـــل

∴ $\frac{\text{حا } \theta}{\text{حتا } \theta}$ = ٢حا θ ∴ حا θ = ٢حا θ حتا θ

∴ حا θ − ٢حا θ حتا θ = ٠ ∴ حا θ(١ − ٢حتا θ) = ٠

∴ حا θ = ٠ أو حتا θ = $\frac{١}{٢}$

∴ عندما حا θ = ٠ ∴ θ = ٠ أو ١٨٠° ، ٣٦٠°

عندما حتا θ = $\frac{١}{٢}$ ∴ θ = ٦٠° ، ٣٠٠°

∴ م . ح = {٠ ، ٦٠° ، ١٨٠° ، ٣٠٠° ، ٣٦٠°}

• **مثال (٥) :** حل المعادلة : قا θ − ٢حتا θ = ١ حيث θ ∈ [٠ ، ٣٦٠°]

الحـــل

∵ قا θ = $\frac{١}{\text{حتا } \theta}$ ∴ $\frac{١}{\text{حتا } \theta}$ − ٢حتا θ = ١

∴ ١ − ٢حتا^{٢} θ = حتا θ ∴ ٢حتا^{٢} θ + حتا θ − ١ = ٠

∴ (٢حتا θ − ١)(حتا θ + ١) = ٠

∴ ٢حتا θ − ١ = ٠ أو حتا θ = −١

حتا θ = $\frac{١}{٢}$ | θ = ١٨٠°

∴ θ = ٦٠° ، ٣٠٠°

∴ م . ح = {٦٠° ، ١٨٠° ، ٣٠٠°}

تمرين (٢) : على حل المعادلات المثلثية

• **مجموعة (أ) :**

• **أوجد مجموعة حل المعادلات التالية : حيث صفر° ≤ س ≤ ٣٦٠°**

١. حا س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (٤٥° ، ١٣٥°)
٢. حتا س = −$\frac{١}{٢}$ (١٢٠° ، ٢٤٠°)
٣. طا^{٢} س = ٣ (٦٠° ، ١٢٠° ، ٢٤٠° ، ٣٠٠°)
٤. حا س = حتا س (٤٥° ، ٢٢٥°)
٥. ٢حا س = طا س (٠° ، ١٨٠° ، ٦٠° ، ٣٠٠°)
٦. ٢حا س − قتا س = ١ (٢١٠° ، ٣٣٠° ، ٩٠°)
٧. حا^{٢} س − ٢حتا س + $\frac{١}{٤}$ = ٠ (٦٠° ، ٣٠٠°)
٨. ٢حا س − ٤حتا س = صفر (٢٦´ ٦٣° ، ٢٦´ ٢٤٣°)
٩. ٢حتا^{٢} س = ٥حتا س + ٣ (١٢٠° ، ٢٤٠°)
١٠. حا س = ٢ (ليس لها حل)
١١. طا س = −١
١٢. حا^{٢} θ − حتا^{٢} θ = $\frac{١}{٢}$
١٣. ٥ طتا^{٢} θ − ٦ قتا θ = ٣

• **مجموعة (ب) :** • أوجد الحل العام لكل من من المعادلات التالية :

❶ ظا θ = ١
❷ حا θ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
❸ ٢ حتا θ = ١
❹ ظا θ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
❺ ٢ حتا θ − $\sqrt{٣}$ = ٠
❻ حتا θ = حا ٢θ
❼ حا$^{٢}\theta$ − حتا θ = ٠
❽ ٢ حا$^{٢}\theta$ − حا θ = ٠
❾ $\sqrt{٣}$ حا θ حتا θ − حا θ = ٠

درس ٣ | حل المثلث القائم الزاوية

• للمثلث ٦ عناصر هى ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا ويتعين عناصر أى Δ إذا علم قياسات أية ثلاث منها على أن يكون أحداها ضلعًا على الأقل .

• معنى حل Δ هو إيجاد قياسات العناصر غير المعلومة فيه .

• قاعدة عامة : فى Δ القائم الزاوية

$$\frac{\text{طول الضلع المطلوب}}{\text{طول الضلع المعلوم}} = \text{دالة مثلثية لزاوية حادة فى } \Delta$$

• مثال (١) :

حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى جـ حيث :

ق(∠أ) = ٥٦° ١٢َ ، أ ب = ٥٠ سم

الحل

ق(∠ب) = ٩٠° − ٥٦° ١٢َ = ٣٣° ٤٨َ

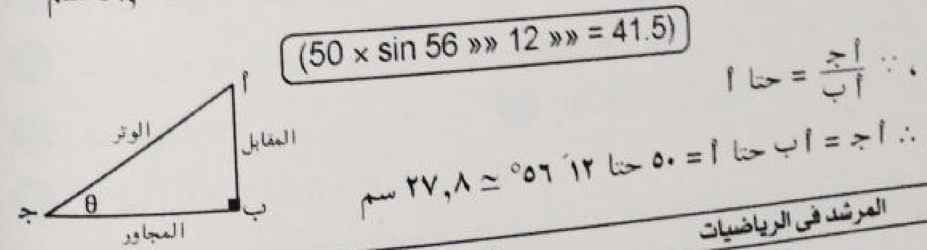
(90 − 56 . »» 12 . »» = 33° 48°)

∵ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$ = حا أ ∴ ب جـ = أ ب حا أ = ٥٠ × حا ٥٦° ١٢َ ≃ ٤١,٥ سم

(50 × sin 56 »» 12 »» = 41.5)

، ∵ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}}$ = حتا أ

∴ أ جـ = أ ب حتا أ = ٥٠ حتا ٥٦° ١٢َ ≃ ٢٧,٨ سم



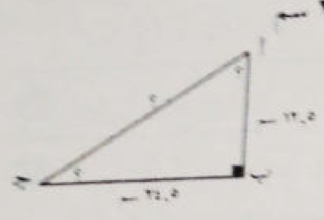
• تذكر أن :

ظا θ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ ، حا θ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ، حتا θ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

• مثال (٢) : حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب

حيث أ ب = ١٢,٥ سم ، ب جـ = ٢٤,٥ سم

الحل



$\frac{١٢,٥}{٢٤,٥}$ = ظا جـ

باستخدام الآلة الحاسبة نحصل على جـ

(12.5 ÷ 24.2 = SH Tan (Ans) = 27° 1` 51.1``)

∴ ق(∠جـ) = ٢٧° ١َ ٥١ً

∴ ق(∠أ) = ٩٠° − ق(∠جـ) = ٩٠° − ٢٧° ١َ ٥١ً = ٦٢° ٥٨َ ٩ً

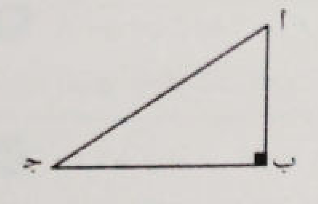
∵ حا جـ = $\frac{١٢,٥}{\text{أ جـ}}$ ⇐ أ جـ = $\frac{١٢,٥}{\text{حا جـ}}$

العملية على الآلة :

(12.5 ÷ sin 27° 1` 51`` ≃ 27.5)

أو أ جـ = $\sqrt{(١٢,٥)^{٢} + (٢٤,٥)^{٢}}$ ≃ ٢٧,٥ سم

• ملحوظة هامة : إذا علم طولى ضلعين فى Δ قائم الزاوية فيمكن إيجاد طول الضلع الثالث باستخدام فيثاغورث :



(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

(أ ب)^{٢} = (أ جـ)^{٢} − (ب جـ)^{٢}

(ب جـ)^{٢} = (أ جـ)^{٢} − (أ ب)^{٢}

[هـ] $\text{حا}(\pi - \theta) = \text{حا}\,\theta$ [و] $\text{طتا}\,\theta = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

[ز] $\text{قا}(\frac{\pi}{٢} - \theta) = \text{قتا}\,\theta$

---

❷ **ضع فى أبسط صورة :**

[أ] $(\text{حا}\,\theta + \text{حتا}\,\theta)^٢ - ٢\text{حا}\,\theta\,\text{حتا}\,\theta$ [ب] $\frac{١ + \text{طا}^٢\theta}{١ + \text{طتا}^٢\theta}$

[جـ] $\frac{١}{\text{حا}^٢\theta} - \frac{١}{\text{طتا}^٢\theta}$ [ء] $\text{حتا}(\frac{\pi}{٢} - \theta)\,\text{قا}(\frac{\pi}{٢} - \theta)$

[هـ] $\frac{\text{حا}(\frac{\pi}{٢} - \theta)}{\text{حتا}(\frac{\pi}{٢} - \theta)}$ [و] $\text{طا}\,\theta\,\text{قتا}\,\theta\,\text{حا}(\frac{\pi}{٢} - \theta)$

[ز] $\frac{\text{حا}(\frac{\pi}{٢} - \theta)}{\text{حتا}(\frac{\pi}{٢} - \theta)} - \frac{\text{حا}\,\theta}{\text{حتا}(\pi - \theta)}$ [ح] $\frac{\text{حا}(\pi - \theta)}{\text{حتا}(\frac{\pi}{٢} - \theta)} + \frac{\text{حا}^٢\theta}{١ - \text{حتا}^٢\theta}$

[ط] $\text{حا}\,\theta\,\text{قا}\,\theta\,\text{طتا}\,\theta + \text{قتا}\,\theta\,\text{طا}\,\theta\,\text{حتا}\,\theta$

---

❸ **أثبت صحة المتطابقات التالية :**

[أ] $\frac{١ + \text{طتا}^٢\theta}{١ + \text{طا}^٢\theta} = \text{طتا}^٢\theta$ [ب] $\frac{\text{طا}\,\theta + \text{طتا}\,\theta}{\text{قا}\,\theta + \text{قتا}\,\theta} = ١$

[جـ] $(\text{قا}\,\theta - \text{طا}\,\theta)^٢ = \frac{١ - \text{حا}\,\theta}{١ + \text{حا}\,\theta}$ [ء] $\frac{(١ - \text{حا}^٢\theta)(١ - \text{حتا}^٢\theta)}{\text{طا}^٢\theta} = \text{حتا}^٤\theta$

[هـ] $\frac{\text{حا}\,\theta\,\text{حتا}\,\theta}{\text{طا}\,\theta} + \frac{\text{قا}\,\theta}{\text{قا}\,\theta\,\text{قتا}\,\theta} = ١$

• مجموعة (ب) :

❶ $\frac{\text{حتا}^٤\text{جـ} - \text{حا}^٤\text{جـ}}{\text{حتا جـ} - \text{حا جـ}} = \text{حتا جـ} + \text{حا جـ}$

❷ $\text{حتا}^٤\text{جـ} + \text{حا}^٢\text{جـ} = \text{حتا}^٢\text{جـ} + \text{حا}^٤\text{جـ}$

❸ $\text{قتا}^٢\text{جـ} + \text{قا}^٢\text{جـ} = \text{قتا}^٢\text{جـ}\,\text{قا}^٢\text{جـ}$

❹ $(\text{طا س} + \text{طتا س})^٢ = \text{قا}^٢\text{س} + \text{قتا}^٢\text{س}$

❺ $\text{حا ب طا ب} = \frac{١ - \text{حتا}^٢\text{ب}}{\text{حتا ب}}$

❻ $\text{طتا س} + \text{طا س} = \text{قا س قتا س}$

❼ $\frac{١}{\text{طا}^٢\text{أ}} + ١ = \frac{١}{\text{حا}^٢\text{أ}}$

❽ $١ - \text{طا}^٤\text{جـ} = ٢\text{قا}^٢\text{جـ} - \text{قا}^٤\text{جـ}$

❾ $\frac{\text{حا}^٣\text{س} + \text{حتا}^٣\text{س}}{\text{حا س} + \text{حتا س}} + \frac{\text{حا}^٣\text{س} - \text{حتا}^٣\text{س}}{\text{حا س} - \text{حتا س}} = ٢$

❿ $\text{طا}^٢\text{جـ} - \text{طا}^٢\text{ء} = \frac{\text{حا}^٢\text{جـ} - \text{حا}^٢\text{ء}}{\text{حتا}^٢\text{جـ} \,.\, \text{حتا}^٢\text{ء}}$

⓫ $\text{طتا أ} \div \text{قا أ قتا أ} = ١ - \text{حا}^٢\text{أ}$

درس ٢ حل المعادلات المثلثية

• مثال (١) : أوجد مجموعة الحل للمعادلة : $\text{حا س} = \frac{١}{٢}$ حيث $٠° \le \text{س} \le ٣٦٠°$ ثم أوجد الحل العام لهذه المعادلة .

الحـل

∵ الزاوية الحادة التى جيبها $= \frac{١}{٢}$ هى $٣٠°$

∵ الجيب موجب ∴ الزاوية س تقع فى الربع الأول أو الربع الثانى .

∴ $\text{س} = ٣٠°$ أ، $\text{س} = ١٨٠° - ٣٠° = ١٥٠°$ حيث $\text{س} \in]٠ ، ٣٦٠°[$

∴ م . ح $= \{\frac{\pi}{٦} ، \frac{٥\pi}{٦}\}$

• الحل العام : نضيف لكل ناتج $٢\pi\text{ن}$ حيث $\text{ن} \in \text{ص}$

∴ مجموعة الحل العام : $\{\frac{\pi}{٦} + ٢\pi\text{ن} ، \frac{٥\pi}{٦} + ٢\pi\text{ن}\}$

• مثال (٢) : أوجد مجموعة الحل للمعادلة : $\text{حتا}\,\theta = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ فى $٠ < \theta < ٢\pi$

ثم أوجد الحل العام لهذه المعادلة .

الحـــل

∵ الزاوية الحادة التى جيب تمامها $\frac{1}{\sqrt{2}}$ هى ٤٥° = $\frac{\pi}{4}$

∴ حتا (موجبة) ∴ الزاوية تقع فى الربع الأول أو الرابع .

∴ θ = $\frac{\pi}{4}$ ، θ = ٣٦٠° − ٤٥° = ٣١٥° = $\frac{7}{4}\pi$

∴ م . ح = {$\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{7\pi}{4}$}

• **ملحوظة هامة :** ٣١٥° تكافئ −٤٥° ∴ م . ح = {$\frac{\pi}{4}$ ، $-\frac{\pi}{4}$}

• **الحل العام :** نضيف لكل ناتج ٢πن

∴ مجموعة الحل العام : {$\pm\frac{\pi}{4}$ + ٢πن} حيث ن ∈ ص

• **ملحوظة :** الحل العام يمكن أن يكون : $\frac{\pi}{4}$ + ٢πن أ، $\frac{7}{4}\pi$ + ٢πن

• **مثال (٣) :** أوجد مجموعة الحل للمعادلة : طا θ = $\sqrt{3}$ حيث ٠ ≤ θ ≤ ٢π
ثم أوجد الحل العام لهذه المعادلة .

الحـــل

∵ θ = طا$^{-1}$ $\sqrt{3}$ ∴ θ = $\frac{\pi}{3}$ ∵ طا (موجبة) فى الربع الأول والثالث .

∴ م . ح فى [٠ ، ٢π] هى $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{\pi}{3}$ + π = $\frac{4}{3}\pi$

• **الحل العام :** نضيف للناتج الأول فقط πن وهى مع الطا ، طتا

∴ الحل العام : $\frac{\pi}{3}$ + πن

• **مثال (٤) :** أوجد مجموعة حل المعادلة : طا θ = ٢حا θ حيث θ ∈ [٠ ، ٣٦٠°]

الحـــل

∴ $\frac{\text{حا}\ \theta}{\text{حتا}\ \theta}$ = ٢حا θ ∴ حا θ = ٢حا θ حتا θ

∴ حا θ − ٢حا θ حتا θ = ٠ ∴ حا θ(١ − ٢حتا θ) = ٠

∴ حا θ = ٠ أ، حتا θ = $\frac{1}{2}$

∴ عندما حا θ = ٠ ∴ θ = ٠ أ، ١٨٠° ، ٣٦٠°

عندما حتا θ = $\frac{1}{2}$ ∴ θ = ٦٠° ، ٣٠٠°

∴ م . ح = {٠ ، ٦٠° ، ١٨٠° ، ٣٠٠° ، ٣٦٠°}

• **مثال (٥) :** حل المعادلة : قا θ − ٢حتا θ = ١ حيث θ ∈ [٠ ، ٣٦٠°]

الحـــل

∵ قا θ = $\frac{1}{\text{حتا}\ \theta}$ ∴ $\frac{1}{\text{حتا}\ \theta}$ − ٢حتا θ = ١

∴ ١ − ٢حتا^2 θ = حتا θ ∴ ٢حتا^2 θ + حتا θ − ١ = ٠

∴ (٢حتا θ − ١)(حتا θ + ١) = ٠

∴ ٢حتا θ − ١ = ٠ أ، حتا θ = −١

حتا θ = $\frac{1}{2}$ | θ = ١٨٠°

∴ θ = ٦٠° ، ٣٠٠°

∴ م . ح = {٦٠° ، ١٨٠° ، ٣٠٠°}

تمرين (٢) : على حل المعادلات المثلثية

• **مجموعة (أ) :**

• **أوجد مجموعة حل المعادلات التالية : حيث صفر° ≤ س ≤ ٣٦٠°**

1. حا س = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (٤٥° ، ١٣٥°)
2. حتا س = $-\frac{1}{2}$ (١٢٠° ، ٢٤٠°)
3. طا^2 س = ٣ (٦٠° ، ١٢٠° ، ٢٤٠° ، ٣٠٠°)
4. حا س = حتا س (٤٥° ، ٢٢٥°)
5. ٢حا س = طا س (٠° ، ١٨٠° ، ٦٠° ، ٣٠٠°)
6. ٢حا س − قتا س = ١ (٢١٠° ، ٣٣٠° ، ٩٠°)
7. حا^2 س − ٢حتا س + $\frac{1}{4}$ = ٠ (٦٠° ، ٣٠٠°)
8. ٢حا س − ٤حتا س = صفر (٢٦َ ٦٣° ، ٢٦َ ٢٤٣°)
9. ٢حتا^2 س = ٥حتا س + ٣ (١٢٠° ، ٢٤٠°)
10. حا س = ٢ (ليس لها حل)
11. طا س = −١
12. حا^2 θ − حتا^2 θ = $\frac{1}{2}$
13. ٥ طتا^2 θ − ٦ قتا θ = ٣

• **مجموعة (ب) :** • أوجد الحل العام لكل من من المعادلات التالية :

1. ظا θ = ١
2. حا θ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
3. ٢ حتا θ = ١
4. ظا θ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
5. ٢ حتا θ − $\sqrt{٣}$ = ٠
6. حتا θ = حا ٢θ
7. حتا^{٢} θ − حتا θ = ٠
8. ٢ حا^{٢} θ − حا θ = ٠
9. $\sqrt{٢}$ حا θ حتا θ − حا θ = ٠

درس ٣ : حل المثلث القائم الزاوية

• للمثلث ٦ عناصر هى ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا ويتعين عناصر أى Δ إذا علم قياسات أية ثلاث منها على أن يكون أحداها ضلعًا على الأقل .

• معنى حل Δ هو إيجاد قياسات العناصر غير المعلومة فيه .

• قاعدة عامة : فى Δ القائم الزاوية

$$\frac{\text{طول الضلع المطلوب}}{\text{طول الضلع المعلوم}} = \text{دالة مثلثية لزاوية حادة فى } \Delta$$

• **مثال (١) :**

حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى جـ حيث :

ق(∠أ) = ٥٦° ١٢َ ، أ ب = ٥٠ سم

الحل

ق(∠ب) = ٩٠° − ٥٦° ١٢َ = ٣٣° ٤٨َ

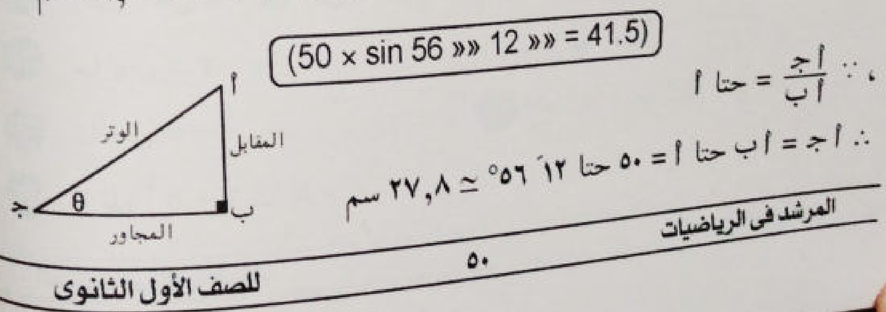
(90 − 56 . »» 12 . »» = 33° 48°)

∵ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$ = حا أ ∴ ب جـ = أ ب حا أ = ٥٠ × حا ٥٦° ١٢َ ≃ ٤١,٥ سم

(50 × sin 56 »» 12 »» = 41.5)

، ∵ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}}$ = حتا أ

∴ أ جـ = أ ب حتا أ = ٥٠ حتا ٥٦° ١٢َ ≃ ٢٧,٨ سم



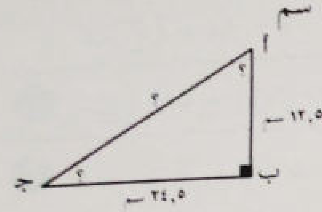
• تذكر أن :

ظا θ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ ، حا θ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ، حتا θ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

• **مثال (٢) :** حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب

حيث أ ب = ١٢,٥ سم ، ب جـ = ٢٤,٥ سم

الحل



$\frac{١٢,٥}{٢٤,٥}$ = ظا جـ

باستخدام الآلة الحاسبة نحصل على جـ

(12.5 ÷ 24.2 = SH Tan (Ans) = 27° 1` 51.1``)

∴ ق(جـ) = ٢٧° ١َ ٥١ً

∴ ق(أ) = ٩٠° − ق(جـ) = ٩٠° − ٢٧° ١َ ٥١ً = ٦٢° ٥٨َ ٩ً

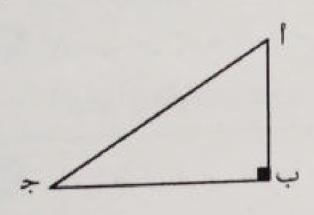
∵ حا جـ = $\frac{١٢,٥}{\text{أ جـ}}$ ⟸ أ جـ = $\frac{١٢,٥}{\text{حا جـ}}$

العملية على الآلة :

(12.5 ÷ sin 27° 1` 51`` ≃ 27.5)

أو أ جـ = $\sqrt{(١٢,٥)^{٢} + (٢٤,٥)^{٢}}$ ≃ ٢٧,٥ سم

• **ملحوظة هامة :** إذا علم طولى ضلعين فى Δ قائم الزاوية فيمكن إيجاد طول الضلع الثالث باستخدام فيثاغورث :



(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

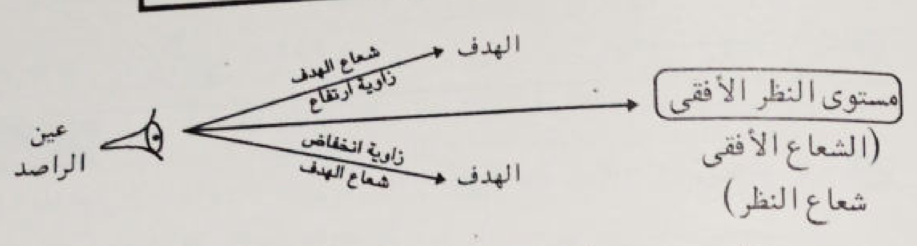
(أ ب)^{٢} = (أ جـ)^{٢} − (ب جـ)^{٢}

(ب جـ)^{٢} = (أ جـ)^{٢} − (أ ب)^{٢}

1. حل Δ أ ب جـ القائم الزاوية فى ب ، إذا كان : أ جـ = ٢٥ سم ، ق(∠جـ) = ٥٣°
2. حل Δ أ ب جـ القائم الزاوية فى ب ، إذا كان : أ جـ = ٢٠ سم ، ب جـ = ١٣ سم .
3. حل Δ س ص ع القائم الزاوية فى ص ، إذا كان : س ص = ١٥ سم ، ق(∠ع) = ٢٤َ ٣٧°
4. حل Δ أ ب جـ القائم الزاوية فى جـ ، إذا كان : أ جـ = ١٨ سم ، ب جـ = ٢٥ سم .
5. أ ب جـ Δ رسم أ ء ⊥ ب جـ يقطعه فى ء ، وكان : أ ء = ٣ سم ، أ ب = ٤ سم ، أ جـ = ٥ سم ، فأوجد قياس كل زوايا المثلث .
6. أ ب جـ Δ فيه : ق(∠أ) = ١٠٠° ، ق(∠ب) = ٣٠° ، رسم أ ء ⊥ ب جـ قطعه فى ء فإذا كان : أ ء = ١٢ سم ، فأوجد أطوال أضلاع Δ أ ب جـ .
7. Δ متساوى الساقين طول ارتفاعه ١٠ سم ، قياس زاوية رأسه ٤٢° أوجد طول قاعدته .
8. **فى الشكل المقابل :** دائرة مركزها م ، أ ب قطر فيها : فإذا كان أ جـ = ١٢ سم ، ق(∠أ) = ٣٧° فأوجد طول نصف قطر الدائرة لأقرب رقمين عشريين .
9. Δ س ص ع فيه : س ص = ١١,٥ سم ، ص ع = ٢٧,٦ سم ، س ع = ٢٩,٩ سم، أثبت أن المثلث قائم الزاوية فى ص ثم أوجد قياس (∠س)
10. دائرة طول نصف قطرها ٦ سم ، رسم فيها وتر يقابل زاوية مركزية قياسها ١٠٨° ، احسب طول هذا الوتر مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين .
11. أ ب جـ ء شبه منحرف متساوى الساقين فيه : أ ء // ب جـ ، أ ب = جـ ء = ٥ سم ، أ ء = ٤ سم ، ب جـ = ١٠ سم ، أوجد قياس كل من ق(∠أ) ، ق(∠ب)

درس ٤

زوايا الارتفاع والانخفاض

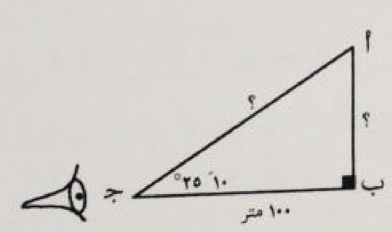


- الشخص الذى ينظر إلى أسفل على هدف ما يرسم زاوية انخفاض أما إذا نظر إلى أعلى على هدف ما فهو يرسم زاوية ارتفاع .
- قياس زاوية الارتفاع = قياس زاوية الانخفاض المرسومتان بين عين الراصد والهدف لأنها قياسا زاويتين متبادلتين .
- الشعاع الأفقى وشعاع الهدف يقعان فى مستوى واحد .
- فى جميع المسائل نهمل طول الشخص إلا إذا نص فى المسألة على غير ذلك .

• مثال (١) :

رصد رجل قمة برج من نقطة تبعد عن قاعدته ١٠٠ م فوجد أن قياس زاوية ارتفاع قمته ١٠َ ٢٥° ، أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر .

الحل



المطلوب إيجاد ارتفاع البرج أ ب

∵ طا جـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

∴ أ ب = ب جـ طا جـ = ١٠٠ طا ١٠َ ٢٥° ≃ ٤٧ م

• مثال (٢) :

من قمة فنار ارتفاعه ٣٠٠ م فوق سطح البحر رصد شخص سفينة وكان قياس زاوية انخفاضها ٦َ ٤٠° ، فما بعد السفينة عن الفنار ؟

الحل

نعتبر أن (أ ب) هو طول الفنار والمطلوب إيجاد بعد السفينة عن الفنار يعنى إيجاد

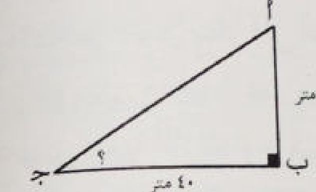
طول (ب ج)

$\text{طا ج} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب ج}}$ $\text{طا } 40^\circ 6' = \frac{300}{\text{ب ج}}$

$\therefore \text{ب ج} = \frac{300}{\text{طا } 40^\circ 6'} \simeq 356$ م

• مثال (٢) :

مئذنة ارتفاعها ٦٠ م ، أوجد قياس زاوية ارتفاع قمتها من نقطة على بعد ٤٠ م منها وتقع فى المستوى الأفقى المار بقاعدتها .



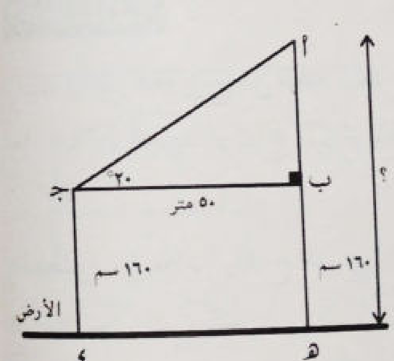
الحل

$\because \text{طا ج} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب ج}}$ $\therefore \text{طا ج} = \frac{60}{40} = \frac{3}{2}$

$\therefore \text{ق}(\hat{\text{ج}}) = 56^\circ 19'$

• مثال (٤) :

رجل طوله ١٦٠ سم يقف على بعد ٥٠ م من قاعدة عمود رأسى ورصد قمة العمود فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ٢٠° ، أوجد ارتفاع العمود عن سطح الأرض لأقرب متر .



الحل

المطلوب طول العمود = أ ب + ب هـ

= أ ب + ١,٦ م

فى Δ أ ب ج : $\because \text{طا ج} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب ج}}$

∴ أ ب = ب ج طا ج = ٥٠ طا ٢٠° ≃ ١٨,٢ م

∴ طول العمود = ١٨,٢ + ١,٦ = ١٩,٨ ≃ ٢٠ م

تمرين (٤) : على زوايا الارتفاع والانخفاض

١ من نقطة على سطح الأرض على بعد ٥٠ م من قاعدة برج وجد أن قياس زاوية ارتفاع البرج ٢٤´ ٥٨° ، أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر .

٢ من قمة صخرة ارتفاعها ١٠٠ م عن سطح البحر وجد أن قياس زاوية انخفاض سفينة ١٤´ ٢٥° ، أوجد بعد السفينة عن قاعدة الصخرة .

٣ مئذنة ارتفاعها ٤٥ م ، أوجد قياس زاوية ارتفاع أعلى نقطة فيها من نقطة فى المستوى الأفقى المار بقاعدتها وتبعد عنها ٣٨ م .

٤ رجل طوله ١٧٠ سم يقف على بعد ٨٠ م من قاعدة برج فكان قياس زاوية ارتفاع قمته ٣٨´ ٧٤° ، أوجد ارتفاع البرج عن سطح الأرض لأقرب م .

٥ قاس راصد زاوية ارتفاع منطاد ثابت فوجدها ٢٥´ ٥٢° ولما سار نحو المنطاد فى خط مستقيم ٥٠٠ م وجد أن زاوية ارتفاعه أصبحت ٢٨´ ٦٨° ، أوجد ارتفاع المنطاد .

٦ رصد شخص واقف على سطح الأرض طائرة على ارتفاع ٨٠٠ م عن سطح الأرض ، فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ١٧´ ٢٥° ، أوجد المسافة بين الشخص والطائرة لأقرب م .

٧ من قمة صخرة ارتفاعها ١٨٠ م من سطح الأرض قيست زاوية انخفاض قارب يبعد ٣٠٠ م عن قاعدة الصخرة ، فما مقدار قياس زاوية الانخفاض بالراديان .

٨ وقف شخص على صخرة ارتفاعها ٥٠ م ولاحظ سفينتين فى البحر على شعاع واحد من قاعدة الصخرة وقاس زاويتى انخفاضيهما فوجدهما ٣٨° ، ٥٥° ، أوجد البُعد بين السفينتين لأقرب متر .

٩ عمود إنارة طوله ٩,٤ متر يلقى ظلا على الأرض طوله ٥,٦ متر ، أوجد بالراديان قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذ .

١٠ تقترب سفينة من منارة ارتفاعها ٥٠ م رصدت قمة المنارة فى لحظة ما فوجدت أن قياس زاوية انخفاضها ٠,١١ ء وبعد ١٥ دقيقة رصدت قمة المنارة ثانيًا فوجدت أن قياس زاوية ارتفاعها فوجدت ٠,٢٢ ء ، احسب سرعة السفينة علمًا بأنها تسير بسرعة منتظمة .

القطاع الدائرى والقطعة الدائرية

• تعريف : القطاع الدائرى

هو جزء من سطح دائرة محدود بقوس من الدائرة ونصفى القطرين المارين بطرفى هذا القوس ففى الرسم .

م أ هـ ب القطاع الأصغر ، (أ م̂ ب) تسمى بزاوية القطاع الأصغر .

م أ ء ب قطاع أكبر وتسمى (أ م̂ ب) المنعكسة بزاوية القطاع الأكبر .

• القوانين لمساحة القطاع الدائرى :

من الرسم المقابل ، إذا كان :

ل = طول قوس القطاع الأصغر

نق = طول نصف قطر دائرة القطاع

$\theta^{ء}$ = القياس الدائرى لزاوية القطاع

س° = القياس الستينى لزاوية القطاع

• مساحة القطاع الدائرى :

$= \frac{1}{2}\text{ل نق} = \frac{1}{2}\theta^{ء}\text{نق}^2$ بمعلومية ل ، نق

$= \frac{\theta^{ء}}{2\text{ط}} \times$ مساحة سطح الدائرة

بمعلومية القياس الدائرى

$= \frac{\text{س}^\circ}{360} \times$ مساحة سطح الدائرة

بمعلومية القياس الستينى

قواعد مساعدة

مساحة الدائرة = ط نق^2

محيط الدائرة = ٢ط نق

$\text{ل} = \theta^{ء}\text{ نق}$

$\text{هـ}^{ء} = \frac{\text{س}^\circ \times \text{ط}}{180}$

$\text{س}^\circ = \frac{\text{هـ}^{ء} \times 180}{\text{ط}}$

محيط القطاع = ٢نق + ل

• مثال (١) :

أوجد مساحة قطاع دائرى قياس زاويته ٦٠° وطول نصف قطر دائرته ٥ سم .

الحل

مساحة القطاع = $\frac{\text{س}^\circ}{360} \times$ مساحة سطح الدائرة = $\frac{60^\circ}{360^\circ} \times \text{ط} \times 25 = 13.09$ سم²

• مثال (٢) :

قطاع دائرى مساحته ٦ سم² ومحيطه ١٤ سم ، أوجد نصف قطر القطاع وطول القوس ؟

الحل

المساحة = $\frac{1}{2}$ل نق ∴ ٦ = $\frac{1}{2}$ل نق ∴ ل نق = ١٢ ... (١)

المحيط = ٢نق + ل = ١٤ ∵ ل = ١٤ − ٢نق عوض فى (١)

نق(١٤ − ٢نق) = ١٢ ⇐ ١٤نق − ٢نق² = ١٢

٢نق² − ١٤نق + ١٢ = صفر بالقسمة على ٢

نق² − ٧نق + ٦ = ٠ ⇐ (نق − ٦) (نق − ١) = ٠

∴ نق = ٦ أ، نق = ١

عندما نق = ٦ ∴ ل = ٢ أ، عندما نق = ١ ∴ ل = ١٢

• مثال (٣) :

ثلاث دوائر طول نصف قطر كل منها ٥ سم ومراكزها هى رؤوس لمثلث متساوى الأضلاع وطول ضلعه ١٠ سم ، أوجد مساحة السطح المحصور بين هذه الدوائر .

الحل

من هندسة الشكل القطاعات :

م_1 أ ب ، م_2 أ جـ ، م_3 ب جـ

متساوية فى المساحة

∴ مساحة الجزء المظلل =

مساحة المثلث $\text{م}_1\text{م}_2\text{م}_3$ − ٣ مساحة أى قطاع دائرى

$= \frac{1}{2}\text{م}_1\text{م}_2 \times \text{م}_2\text{م}_3 \text{ حا } 60^\circ - 3 \times \frac{60^\circ}{360^\circ} \times \text{ط نق}^2$

$= \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \times \frac{1}{6} \times \text{ط} \times 25$

$= 43.30127 - 39.26991 = 4.03 \simeq 4$ سم²

ملحوظة

مساحة أى مثلث تساوى نصف حاصل ضرب أى ضلعين فى حا الزاوية بينهما .

تمرين (٥) : على القطاع الدائرى (من امتحانات الأزهر)

❶ أوجد مساحة قطاع دائرى طول قوسه ٦ سم ، وطول قطر دائرته ٨ سم .

❷ قطاع دائرى مساحته ٣٦ سم^{٢} ، طول قوسه ٤,٥ سم

(١) أوجد طول نصف القطر .

(٢) أوجد القياس الدائرى والستينى لزاويته .

❸ قطاع دائرى مساحته ٣٠ سم^{٢} ، قياس زاويته الدائرى ٠,٦^{د} ، أحسب طول نصف قطر دائرته وطول قوسه .

❹ قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ٢٠ سم ومساحة سطحه ٢٠٠ سم^{٢} ، أوجد طول قوس القطاع وقياس زاويته بكل من التقديرين الستينى والدائرى .

❺ قطاع دائرى مساحته ٤ سم^{٢} ومحيطه ٨ سم ، أحسب طول نصف قطر دائرته وقياس زاويته المركزية بالقياسين الدائرى والستينى .

❻ دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم فيها وتر $\overline{أ ب}$ طوله ١٢ سم ، أحسب مساحة القطاع الدائرى م $\overset{\frown}{أ ب}$ الأصغر .

❼ قطاع دائرى محيطه ٦٤ سم وطول نصف قطر دائرته ٢١ سم ، أوجد باستخدام الحاسبة قياس زاويته المركزية بالدرجات ومساحة سطحه .

❽ قطاع دائرى مساحة سطحه ٤٨ سم^{٢} وطول قوسه ١٦ سم ، أوجد محيط القطاع وقياس زاويته المركزية بالتقدير الستينى والدائرى .

❾ أ نقطة خارج دائرة مركزها م رسم المماس $\overleftrightarrow{أ ب}$ يمسها فى ب بحيث كان أ ب = ١٣,٢ سم وصلت $\overline{أ م}$ فقطعت محيط الدائرة فى ء وكان ق(ب أ م) = ٣١° ١٣َ أوجد المساحة المحصورة بين القوس الأصغر $\overset{\frown}{ب ء}$ والقطعتين $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ ء}$.

• **تعريف : القطعة الدائرية**

هو جزء من سطح دائرة محدودة بقوس فيها ووتر مار بنهايتى ذلك القوس .

فى الشكل المقابل :

إذا كان $\overline{ء جـ} \perp \overline{أ ب}$ ، فإن أ جـ ب قطعة دائرية ، أ م ب هى زاوية القطعة ، $\overline{م جـ}$ نصف قطر ، $\overline{هـ جـ}$ ارتفاع القطعة الدائرية .

تذكر أن :
مساحة سطح المثلث = نصف حاصل ضرب طولى أى ضلعين فيه × جيب الزاوية بينهما

قانون مساحة القطعة الدائرية

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} ($\theta^{د}$ − حا θ)

حيث هـ هى الزاوية المركزية (زاوية القطعة) ، $\theta^{د}$ القياس الدائرى لزاوية القطعة .

• **مثال (٤) :**

أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ٥ سم وقياس زاويتها ١٠٠°

الحل

∵ $\frac{س°}{١٨٠} = \frac{\theta^{د}}{ط}$ ∴ $\theta^{د} = \frac{١٠٠° \times ط}{١٨٠°} = ١,٧٤٥^{د}$ ، حا θ = حا ١٠٠° = ٠,٩٨٤٨

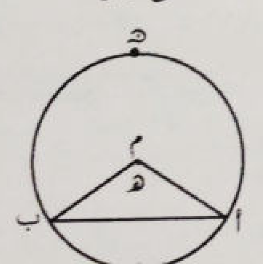
مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} ($\theta^{د}$ − حا θ)

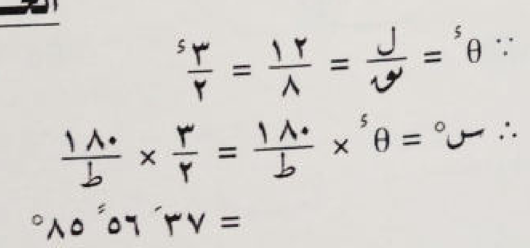
= $\frac{١}{٢}$ × ٢٥(١,٧٤٥ − ٠,٩٨٤٨) = ٩,٥ سم^{٢}

• **مثال (٥) :**

دائرة م طول قطرها ١٦ سم ، أ ، ب نقطتان على الدائرة فإن كان طول القوس الأصغر $\overset{\frown}{أ ب}$ يساوى ١٢ سم ، أوجد لأقرب سم^{٢} مساحة القطعة الكبرى التى وترها $\overline{أ ب}$.

الحل





∵ $\theta^{د} = \frac{ل}{نق} = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}^{د}$

∴ س° = $\theta^{د} \times \frac{١٨٠}{ط} = \frac{٣}{٢} \times \frac{١٨٠}{ط}$

= ٨٥° ٥٦َ ٣٧ً

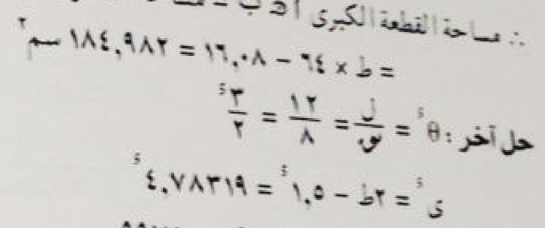
∴ حا θ = ٠,٩٩٧٥

∴ مساحة القطعة الدائرية أ جـ ب = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} (θ^{د} − حا θ)

= $\frac{١}{٢}$ × ٦٤ ($\frac{٣}{٢}$ − ٠,٩٩٧٥) = ١٦,٠٨ سم^{٢}

∴ مساحة القطعة الكبرى أ هـ ب = مساحة الدائرة − مساحة القطعة أ جـ ب

= ط × ٦٤ − ١٦,٠٨ = ١٨٤,٩٨٢ سم^{٢}



حل آخر: θ^{د} = $\frac{ل}{نق}$ = $\frac{١٢}{٨}$ = $\frac{٣}{٢}$^{د}

ى^{د} = ٢ط − ١,٥^{د} = ٤,٧٨٣١٩^{د}

ى$^{\circ}$ = ٣ َ ٢٧٤$^{\circ}$ ∴ حا ى$^{\circ}$ = −٠,٩٩٧٥

∴ مساحة القطعة الكبرى أ هـ ب = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢}(ى^{د} − حا ى)

= $\frac{١}{٢}$ × ٦٤ (٤,٧٨٣١٩ + ٠,٩٩٧٥) = ١٨٤,٩٨٢ سم^{٢}

• مثال (٦) :

دائرتان متساويتان طول نصف قطر كل منها ٤ سم وتمر إحداهما بمركز الأخرى ، أوجد مساحة المنطقة المشتركة بينهما .

<u>**الحل**</u>

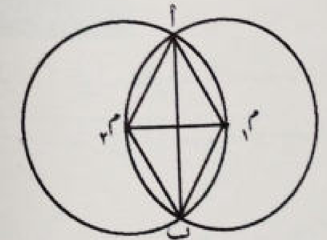
المثلث أ م$_{١}$ م$_{٢}$ متساوى الأضلاع حيث أ م$_{١}$ = أ م$_{٢}$ = م$_{١}$ م$_{٢}$

∴ ق(∠ أ م$_{٢}$ ب) = ١٢٠$^{\circ}$ ، ق(∠ أ م$_{١}$ ب) = ١٢٠$^{\circ}$

∵ إنصاف الأقطار متساوية ∴ مساحة كلا من القطعتين الدائرتين متساويتين

∴ θ^{د} = ١٢٠$^{\circ}$ × $\frac{ط}{١٨٠}$

= $\left(\frac{٢ط}{٣}\right)^{د}$



حا هـ = حا ١٢٠$^{\circ}$ = ٠,٨٦٦

مساحة القطعة أ م$_{١}$ ب = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} (θ^{د} − حا هـ)

= $\frac{١}{٢}$ × ١٦ ($\frac{٢ط}{٣}$ − ٠,٨٦٦) = ٩,٨٣ سم^{٢}

∴ مساحة القطعتين = ١٩,٦٦ سم^{٢} = مساحة المنطقة المشتركة بينهما .

تمرين (٦) : على القطعة الدائرية (من امتحانات الأزهر)

❶ أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطرها ١٠ سم وقياس زاويتها المركزية ١٢٠$^{\circ}$ مقربًا الجواب لأقرب سم^{٢} .

❷ أوجد لأقرب سم^{٢} مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ١٦ سم وزاويتها ٢,٣^{د} .

❸ أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغرى التى طول نصف قطر دائرتها ١٦ سم وطول قوسها ٢٤ سم مقربًا الجواب لأقرب رقم عشرى .

❹ أوجد مساحة القطعة الدائرية التى نصف قطر دائرتها ١٠ سم وارتفاعها ٥ سم .

❺ دائرة مركزها م وطول نصف قطرها ١٠ سم ، رسم الوتر $\overline{أ ب}$ فى الدائرة بحيث كان بعده عن مركز الدائرة يساوى ٥ سم ، أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغرى التى وترها القطعة المستقيمة $\overline{أ ب}$.

❻ Δ أ ب جـ متساوى الأضلاع مرسوم داخل دائرة نصف قطرها ١٠ سم ، أوجد مساحة القطعة التى قوسها $\overset{\frown}{ب جـ}$ لأقرب سم^{٢} .

❼ $\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م ، جـ ∈ الدائرة م وكان أ جـ = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم ، أوجد مساحة القطعة الصغرى التى وترها $\overline{أ جـ}$.

❽ دائرة طول نصف قطرها ١٤ سم ، أ ، ب نقطتان على الدائرة تحصران قوس أصغر طوله ٢١ سم ، أوجد لأقرب سنتيمتر مربع مساحة القطعة الدائرية الصغرى التى وترها $\overline{أ ب}$.

❾ دائرتان طولا نصفى قطريهما ٦ سم ، ٨ سم والبعد بين مركزيهما ١٠ سم ، أوجد المساحة المشتركة بين الدائرتين لأقرب سم^{٢} .

المساحات

• **مساحة المثلث** = $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع

= $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

• مثال (١) : أوجد مساحة المثلث أ ب جـ الذى فيه ب جـ = ١٦ سم ، ب أ = ٢٢ سم

و(ب̂) = ٦٣° ، مقربًا الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية .

الحل

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × ٢٢ × ١٦ حا ٦٣° ≃ ١٥٦,٨١٧ سم^2

• **مساحة الشكل الرباعى بدلالة قطريه :**

مساحة الشكل الرباعى = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى قطريه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

• مثال (٢) : أوجد مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ٣٢ سم ، ٤٦ سم وقياس الزاوية المحصورة بينهما ١٢٢° لأقرب سم^2 .

الحل

مساحة الشكل الرباعى = $\frac{1}{2}$ × ٣٢ × ٤٦ حا ١٢٢° ≃ ٦٢٤ سم^2

• **مساحة المضلع المنتظم :**

مساحة المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه ن وطول ضلعه س = $\frac{1}{4}$ ن س^2 ظتا $\frac{\pi}{ن}$

• مثال (٣) : أوجد مساحة الشكل الخماسى المنتظم الذى طول ضلعه ١٦ سم مقربًا الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية .

الحل

مساحة الشكل الخماسى المنتظم = $\frac{1}{4}$ × ٥ × (١٦)^2 × ظتا $\frac{\pi}{5}$

= $\frac{1}{4}$ × ٥ × (١٦)^2 × $\frac{1}{\text{ظا } 36^\circ}$ ≃ ٤٤٠,٤٤٢ سم^2

• **ملحوظة :** الشكل المنتظم يسمى مسدس ، مسبع ، مثمن ليدل على أنه منتظم .
بدلًا من قولنا الشكل الخماسى المنتظم نسمى ذلك (مُخمس) .

تمرين (٧) : على المساحات

١ أوجد مساحة المثلث س ص ع حيث س ص = ١٨ سم ، ص ع = ١٢ سم ، و(ص̂) = ٣٨° مقربًا لأقرب رقمين عشريين .

٢ أوجد مساحة المثلث أ ب جـ فيه : ب جـ = ٢٥ سم ، أ جـ = ١٩ سم ، و(جـ̂) = ٥٦° لأقرب سم^2

٣ أوجد مساحة المثلث أ ب جـ حيث أ ب = ٢٠ سم ، ب جـ = ٢٤ سم ، و(ب̂) = ١١٠° لأقرب سم^2 .

٤ أوجد مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ١٥ سم ، ١٨ سم ، وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٧٧° لأقرب ثلاثة أرقام عشرية .

٥ أوجد مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ٣٠ سم ، ٢١ سم ، وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٥٥° لأقرب سم^2 .

٦ أوجد مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ٤٠ سم ، ٣٥ سم ، وقياس الزاوية المحصورة بينهما ١٢٥° لأقرب سم^2

٧ أوجد مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ٣٢ سم ، ٢٨ سم ، وقياس الزاوية المحصورة بينهما ١١٠° لأقرب سم^2

٨ أوجد مساحة المسدس الذى طول ضلعه ١٥ سم (مسدس ≡ شكل سداسى منتظم)

٩ أوجد مساحة المسبع الذى طول ضلعه ٢٤ سم .

١٠ أوجد مساحة المثمن الذى طول ضلعه ١٢ سم .

١١ أوجد مساحة المعين الذى طول ضلعه ٨ سم ، وقياس الزاوية المحصورة بين ضلعين متجاورين فيه تساوى ٥٨° .

١٢ مسدس مساحته ٥٤ $\sqrt{3}$ م^2 ، أوجد طول ضلعه .

١٣ شبه منحرف متساوى الساقين قاعدته الكبرى ٨ م ، وقاعدته الصغرى ٣ م ، ويميل على من ساقين على القاعدة الكبرى بزاوية ٧٥° ، أوجد مساحة شبه المنحرف .

ثالثًا

الهندسة التحليلية



درس ١ الكميات القياسية والكميات المتجهة والقطعة المستقيمة الموجهة

• تعاريف أساسية :

(١) الكميات القياسية : هى كميات تتحدد تمامًا بمعرفة مقدارها فقط ، مثل الطول والحجم والمساحة .

(٢) الكميات المتجهة : هى كميات تتحدد تمامًا بمعرفة مقدارها واتجاهها ، مثل السرعة والقوة .

• الفرق بين الإزاحة والمسافة :

(١) الإزاحة : كمية قياسية وهى المسافة المقطوعة للجسم فعليًا .

(٢) الإزاحة : كمية متجهة وهى المسافة المقطوعة فى اتجاه معين بين نقطة البداية ونقطة النهاية فقط .

• مثال لتوضيح ذلك : كما بالشكل المقابل

ج ــــ ٦سم ــــ ب ــــ ٤سم ــــ أ

إذا تحرك جسم من أ ثم ذهب إلى ج ثم رجع إلى ب

فإن المسافة المقطوعة = أ ج + ج ب = ١٠ + ٤ = ١٤ سم

الإزاحة يهمنا البداية والنهاية فقط = أ ب = ٦ سم

(٣) القطعة المستقيمة :

هى مجموعة جزئية من نقط الخط المستقيم ،

فمثلاً $\overline{أب}$ هى المجموعة التى عناصرها النقطتين أ ، ب

وكل نقط الخط المستقيم المحصورة بين أ ، ب ، نلاحظ أن : $\overline{أب} = \overline{بأ}$

(٤) القطعة المستقيمة الموجهة : إذا حددنا نقطة البداية والنهاية للقطعة المستقيمة تسمى القطعة المستقيمة الموجهة ورمزها $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{بأ}$

إذًا : القطعة المستقيمة الموجهة تتحدد تمامًا بثلاثة عناصر هى

(١) نقطة البداية . (٢) نقطة النهاية . (٣) الاتجاه من نقطة البداية لنقطة النهاية .

لذا فإن $\overrightarrow{أب} \neq \overrightarrow{بأ}$ وتقرأ $\overrightarrow{أب}$ لا تكافئ $\overrightarrow{بأ}$

• تعريف القطعة المستقيمة الموجهة : هي .... نهاية واتجاه .

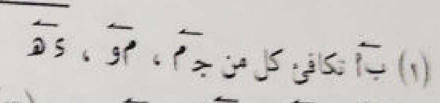
(٥) **معيار القطعة المستقيمة الموجهة :** معيار أب هو طول أب ويرمز له بالرمز ||أب||

• ملحوظة : ||أب|| = ||ب أ|| = أ ب

(٦) **تكافؤ قطعتين مستقيمتين موجهتين :** تتكافأ القطعتان المستقيمتان الموجهتان إذا كان لهما نفس المعيار ونفس الاتجاه .

• مثال (١) : في الشكل المقابل :

أ ب جـ ء هـ و سداسي منتظم مركزه النقطة (م) ، اذكر ما يكافئ ب أ ، م ء ، جـ ء



الحـل

(١) ب أ تكافئ كل من جـ م ، م و ، ء هـ

(٢) م ء = أ م = و هـ = ب جـ

(٣) جـ ء = ب م = م هـ = أ و

• مثال (٢) : في مستوى إحداثي عين النقط أ(٢ ، ٣) ، ب(٥ ، ٨) ، جـ(١ ، -٣) ء(-١ ، ٤) ثم ارسم جـ هـ ، ء ل ، و م ، حيث (و) نقطة الأصل ، كل ذلك يكافئ أب مع إيجاد إحداثي كل من النقط م ، هـ ، ل

الحـل

الخطوة الأولى : تحديد النقط أ ، ب ، جـ ، ء

الخطوة الثانية :

نوجد ما يلي وهو قانون سيدرس فيما بعد .

أب = ب - أ = (٥ ، ٨) - (٢ ، ٣)
= (٣ ، ٥)

لاحظ أن :

الإحداثي السيني الناتج = ٣

الإحداثي الصادي الناتج = ٥

من عند نقطة (جـ) نسير ٣ خطوات في اتجاه محور السينات الموجبة ثم نسير ٥ خطوات في اتجاه محور الصادات الموجبة

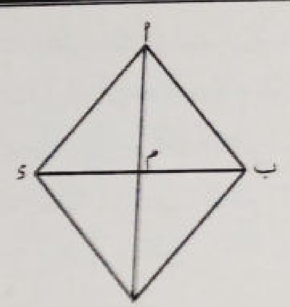
نجد نقطة هـ = (٤ ، ٢) بالمثل ل = (٢ ، ٩) ، م = (٣ ، ٥) هي نفسها أب

تأكيداً للحل كل القطع لها نفس الاتجاه ونفس الطول .

تمرين (١) :
الكميات القياسية والكميات المتجهة والقطعة المستقيمة الموجهة

١ في الشكل المقابل :

أ ب جـ ء معين فيه :



[أ] أب يكافئ ....

[ب] ب جـ يكافئ ....

[جـ] ب م يكافئ ....

[ء] أ م يكافئ ....

٢ أ ب جـ ء مربع تقاطع قطراه في (م) اكتب جميع القطع المستقيمة الموجهة والمتكافئة التي يعينها الشكل .

٣ في الشكل المقابل :

أ ب جـ ء مستطيل تقاطع قطراه في م

ورسم م هـ ⊥ ء جـ ، م هـ = أ ء ،

أكمل ما يأتي : [أ] الشكل أ م هـ ء متوازي أضلاع لأن ....

[ب] الشكل م ب جـ هـ متوازي أضلاع لأن ....

[جـ] الشكل م جـ هـ ء متوازي أضلاع لأن ....

[ء] م هـ يكافئ .... ، ....

[هـ] ء هـ يكافئ .... ، .... [و] ب م يكافئ .... ، ....

٤ في مستوى إحداثي متعامد عين النقط أ = (٥ ، ٢) ، ب = (٠ ، ٥) ، جـ = (٢ ، ٣) ، ء = (-٣ ، -١) ثم عين جـ هـ ، ء ل التي تكافئ أب مع إيجاد إحداثيي النقطتين هـ ، ل

٥ في مستوى إحداثي متعامد عين النقط أ(٤ ، -٣) ، ب(٤ ، ٤) ، جـ(-٣ ، -١) وكانت كل من القطع المستقيمة الموجهة أب ، جـ ء ، و م ، هـ و متكافئة

حيث (و) نقطة الأصل ، أوجد إحداثيات كل من ء ، م ، هـ

٦ فى الشكل المقابل :
أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ
س ، ص ، ع منصفات $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{بجـ}}$ ، $\overline{\text{جـأ}}$
على الترتيب ، أولاً : أى العبارات التالية صحيحة :
[أ] ‖س ص‖ = ‖ع جـ‖ [جـ] ب ص تكافئ ع س
[ب] س ص تكافئ ع ص
ثانيًا : اكتب القطع التى تكافئ ما يلى إن وجدت :
[أ] ب س [ب] أ ع [جـ] س ع
[ء] جـ ص [هـ] س ص [و] ع ص

درس ٢ مفهوم المتجه هندسيًا وجبريًا

فى الشكل المقابل : كل القطع المستقيمة متوازية ولها نفس الطول .
∴ القطع مستقيمة موجهة متكافئة
وهى و أ = ب جـ = ء هـ = ط ى = ك ل = ز ح

• ملحوظة (١) :
على تلك القطع :
و أ = أ − و
= (٤ ، ٣) − (٠ ، ٠)
= (٤ ، ٣)
ب جـ = جـ − ب
= (٤ ، ٦) − (٠ ، ٣)
= (٤ ، ٣)

ء هـ = هـ − ء = (−٢ ، ٥) − (−٦ ، ٢) = (٤ ، ٣)
ط ى = ى − ط = (−٤ ، ٠) − (−٨ ، −٣) = (٤ ، ٣)
ك ل = ل − ك = (١ ، −١) − (−٣ ، −٤) = (٤ ، ٣)
ز ح = ح − ز = (٦ ، −٢) − (٢ ، −٥) = (٤ ، ٣)

• ملحوظة (٢) : يمكن إنشاء عدد لا نهائى من القطع المستقيمة الموجة المتكافئة المذكورة فى الشكل السابق ، وأحسن طريقة لإنشاء تلك القطع المتكافئة ، نأتى من اى نقطة نسير ٤ خطوات فى اتجاه محور السينات الموجب ثم ٣ خطوات فى اتجاه محور الصادات الموجب .

• ملحوظة (٣) : القطعة المستقيمة الموجهة الخارجة من نقطة الأصل لها اسم يخصها هو **(متجه الموضع)** وهو و أ فى هذه المجموعة .

• تعريف متجه الموضع لنقطة معلومة بالنسبة لنقطة الأصل : هى القطعة المستقيمة الموجهة التى بدايتها نقطة الأصل ونهايتها النقطة المعلومة .

• تعريف المتجه هندسيًا :
مجموعة لا نهائية من القطع المستقيمة الموجهة المتكافئة التى لها متجه موضع ، ونقطة نهاية متجه الموضع هو الذى يمثل هذه المجموعة فى المستوى الإحداثى .

هذا التعريف من معد كتاب المرشد حتى يتضح المفهوم .

من هذا التعريف يتضح أن كل متجه يمثل بنقطة وحيدة فى المستوى الإحداثى .
حتى نعرِّف مفهوم المتجه جبريًا ، وهو المذكور فى كتاب الوزارة .

• تمهيد (١) : ∵ ح × ح = {(س ، ص) : س ∈ ح ، ص ∈ ح}
، ح × ح هى ح^2 وتقرأ ح^2 اثنان

• تعريف (١) : لكل (س$_1$ ، ص$_1$) ∈ ح^2 ، (س$_2$ ، ص$_2$) ∈ ح^2 يعرف مجموعهما
(س$_1$ ، ص$_1$) + (س$_2$ ، ص$_2$) = (س$_1$ + س$_2$ ، ص$_1$ + ص$_2$) ∈ ح^2

• تعريف (٢) : لكل (س ، ص) ∈ ح^2 ولكل ك ∈ ح*
يعرَّف ك(س ، ص) = (ك س ، ك ص) ∈ ح^2

∴ بسبب التقابل بين نقط المستوى وهى المجموعة ح^2 ونقط متجهات الموضع تم بناء نظام رياضى لتعريف المتجه جبريًا .

• **تعريف المتجه جبريا :** عناصر المجموعة $ح^{٢}$ مع عمليتى الجمع والضرب فى عدد حقيقى المعرفتين عليها تسمى متجهات .

من التعريف كل نقطة فى المستوى الإحداثى المتعامد تمثل متجه .

• **تنبيهات :** (١) $\overline{أب} \subset \overrightarrow{أب} \subset \overleftrightarrow{أب}$

(٢) عندما نقول $\overrightarrow{س ص} = \overrightarrow{ع ل}$ يعنى س ص = ع ل ، $\overline{س ص} \parallel \overline{ع ل}$

(٣) نسمى كل القطع المستقيمة الموجهة المتكافئة بالمتجه وأى من هذه القطع يعتبر تمثيل هندسي لهذا المتجه .

(٤) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = ٢\overrightarrow{ب} \Leftarrow \overrightarrow{أ} \parallel \overrightarrow{ب}$ ولهما نفس الاتجاه ، وطول $\overrightarrow{أ}$ ضعف طول $\overrightarrow{ب}$

(٥) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = -٢\overrightarrow{ب} \Leftarrow \overrightarrow{أ} \parallel \overrightarrow{ب}$ واتجاهها مضاد ، وطول $\overrightarrow{أ}$ ضعف طول $\overrightarrow{ب}$

• **خواص عمليتى الضرب والجمع :**

تتحقق فى عملية الجمع الخواص التالية : (أ) خاصية الانغلاق . (ب) الإبدال

(ج) التجميع أو الدمج . (ء) خاصية وجود العناصر المحايد وهو و = (٠ ، ٠)

(هـ) خاصية توافر المعكوسات . (و) خاصية الحذف .

ويتحقق فى عملية ضرب متجه فى عدد حقيقى : الخواص التالية :

(أ) **خاصية التوزيع :** إذا كان أ ، ب $\in ح^{٢}$ ، $ك_{١}$ ، $ك_{٢} \in ح$

فإن : (١) $ك_{١}(\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}) = ك_{١} أ + ك_{١} ب$

(٢) $(ك_{١} + ك_{٢})\overrightarrow{أ} = ك_{١}\overrightarrow{أ} + ك_{٢}\overrightarrow{ب}$

(ب) **خاصية التجميع :** لكل أ $\in ح^{٢}$ ، لكل $ك_{١}$ ، $ك_{٢} \in ح$

يكون $(ك_{١}ك_{٢})\overrightarrow{أ} = ك_{١}(ك_{٢}\overrightarrow{أ})$

(ج) **خاصية الحذف :** إذا كان : $ك\overrightarrow{أ} = ك\overrightarrow{ب}$ فإن $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$ والعكس صحيح .

• **مفهوم التساوى :** إذا كان $\overrightarrow{م} = (س_{١} ، ص_{١})$ ، $\overrightarrow{هـ} = (س_{٢} ، ص_{٢})$

إذا كان : $س_{١} = س_{٢}$ ، $ص_{١} = ص_{٢}$ ، فإن $\overrightarrow{م} = \overrightarrow{هـ}$ والعكس صحيح

• **مثال (١) :** إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٣ ، ٥)$ ، $\overrightarrow{ب} = (-٢ ، ١)$ ، $\overrightarrow{ج} = (-١ ، ٧)$

أوجد : أولاً : $٥\overrightarrow{أ}$ ، $-\overrightarrow{ب}$ ، $\frac{٢}{٣}\overrightarrow{ج}$ ، $٢\overrightarrow{أ} + ٣\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{ج}$

ثانيًا : عبر عن $\overrightarrow{ج}$ بدلالة $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

الحل

أولاً : $٥\overrightarrow{أ} = ٥(٣ ، ٥) = (١٥ ، ٢٥)$ ، $-\overrightarrow{ب} = -(-٢ ، ١) = (٢ ، -١)$

، $\frac{٢}{٣}\overrightarrow{ج} = \frac{٢}{٣}(-١ ، ٧) = (-\frac{٢}{٣} ، \frac{١٤}{٣})$

$٢\overrightarrow{أ} + ٣\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{ج} = ٢(٣ ، ٥) + ٣(-٢ ، ١) - (-١ ، ٧)$

$= (٦ ، ١٠) + (-٦ ، ٣) + (١ ، -٧) = (١ ، ٦)$

ثانيًا : بفرض أن م ، هـ $\in ح$ وبفرض أن $\overrightarrow{ج} = م\overrightarrow{أ} + هـ\overrightarrow{ب}$

$\therefore (-١ ، ٧) = م(٣ ، ٥) + هـ(-٢ ، ١)$

$= (٣م ، ٥م) + (-٢هـ ، هـ) = (٣م - ٢هـ ، ٥م + هـ)$

$\therefore -١ = ٣م - ٢هـ$ ..... (١) ، $٧ = ٥م + هـ$ ..... (٢)

$\therefore هـ = ٧ - ٥م$ عوض فى (١) $\therefore -١ = ٣م - ٢(٧ - ٥م)$

$\therefore -١ = ٣م - ١٤ + ١٠م$ $\therefore ١٣ = ١٣م$ $\therefore م = ١$

، عوض فى (١) $\therefore هـ = ٢$ $\therefore \overrightarrow{ج} = \overrightarrow{أ} + ٢\overrightarrow{ب}$

• **قانون :** ما هو الارتباط بين متجه الموضع $\overrightarrow{ج}$ الذى له نهاية تمثل المتجه وأى قطعة مستقيمة موجهة لها بداية ونهاية ، ولتكن $\overrightarrow{أب}$ متكافئة مع متجه الموضع $\overrightarrow{ج}$.

القانون : $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ج}$

ملحوظة : هذا القانون موجود فى كتاب الوزارة بعد درسين .

وأيضًا إذا كان : $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{جء}$

$\Leftarrow \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ء} - \overrightarrow{ج}$

• **تعريف معيار المتجه :** هو طول القطعة المستقيمة الممثلة للمتجه .

فإذا كان : $\overrightarrow{ر} = (س ، ص)$ فإن $\|\overrightarrow{ر}\| = \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$

• **ملحوظة هامة :** المقياس يتعامل مع الأعداد الحقيقية لكن المعيار يتعامل مع المتجهات .

• **مثال (٢) :** إذا كان : أ = (٣ ، -٢) ، ب = (٦ ، ٢) ، ج = (١ ، ٣) ، ء = (٤ ، ٧)

أولاً : أثبت أن $\overrightarrow{أب}$ تكافئ $\overrightarrow{جء}$ ثانيًا : أوجد $\|\overrightarrow{أب}\|$

الحل

$\because \overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (٦ ، ٢) - (٣ ، -٢) = (٣ ، ٤)$

، $\overrightarrow{جء} = \overrightarrow{ء} - \overrightarrow{ج} = (٤ ، ٧) - (١ ، ٣) = (٣ ، ٤)$

$\therefore \overrightarrow{أب} = \overrightarrow{جء}$ $\therefore \|\overrightarrow{أب}\| = \|\overrightarrow{جء}\| = \sqrt{٩ + ١٦} = ٥$

• **مثال (٢) :** في المستوى الإحداثي المتعامد أ(٣ ، -٢) ، ب(٦ ، ٢) ، جـ(١ ، ٣) ، ء(٤ ، ٧) إذا كانت القطع المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{\text{بجـ}} = \overrightarrow{\text{أم}} = \overrightarrow{\text{هـء}}$

أوجد إحداثيي كل من م ، هـ

الحـــل

∵ $\overrightarrow{\text{بجـ}} = \overrightarrow{\text{أم}}$ ⇐ ∴ $\overrightarrow{\text{جـ}} - \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{م}} - \overrightarrow{\text{أ}}$

⇐ ∴ (١ ، ٣) − (٦ ، ٢) = $\overrightarrow{\text{م}}$ − (٣ ، -٢)

∴ $\overrightarrow{\text{م}}$ = (١ ، ٣) − (٦ ، ٢) + (٣ ، -٢) = (-٢ ، -١)

∵ $\overrightarrow{\text{بجـ}} = \overrightarrow{\text{هـء}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{جـ}} - \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ء}} - \overrightarrow{\text{هـ}}$ ⇐ $\overrightarrow{\text{هـ}} = \overrightarrow{\text{ء}} - \overrightarrow{\text{جـ}} + \overrightarrow{\text{ب}}$

∴ $\overrightarrow{\text{هـ}}$ = (٤ ، ٧) − (١ ، ٣) + (٦ ، ٢) = (٩ ، ٦)

تمرين (٢) : على مفهوم المتجه هندسيا وجبريا

❶ إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، -٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (-٢ ، ٥) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (٠ ، ١١)

اكتب كلاً مما يأتي :

أولاً : ٢$\overrightarrow{\text{ب}}$ ، ٣$\overrightarrow{\text{جـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{جـ}}$ ، $\frac{1}{2}$($\overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{جـ}}$)

ثانيًا : عبر عن $\overrightarrow{\text{جـ}}$ بدلالة $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$

❷ إذا كانت $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٢ ، -٦) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (-٢ ، ٥) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (-٦ ، ١٤) ، أوجد :

أولاً : ٢$\overrightarrow{\text{أ}}$ ، −$\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{جـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{جـ}}$

ثانيًا : عبر عن $\overrightarrow{\text{جـ}}$ بدلالة $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$

❸ إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٦ ، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٤ ، ٣)

أوجد : ‖$\overrightarrow{\text{أ}}$‖ ، ‖$\overrightarrow{\text{ب}}$‖ ، ‖٢$\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}$‖ ، ‖٢$\overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}$‖

❹ إذا كان أ = (٢ ، -٣) ، ب = (٣ ، ١) أوجد متجه الموضع المكافئ لـ $\overrightarrow{\text{أب}}$

❺ إذا كان أ = (٨ ، ٣) ، ب = (٣ ، ٥) ، وكان $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{وجـ}}$

أوجد إحداثيي (جـ)

❻ أوجد متجه الموضع المكافئ لـ $\overrightarrow{\text{ول}}$ حيث $\overrightarrow{\text{وه}}$ = (٢ ، -٣) ، ل = (٣ ، ٥)

❼ إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (١ ، ٥) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٠ ، -٢) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (-١ ، ٠)

أوجد ‖٢$\overrightarrow{\text{أ}}$ − ٢$\overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{جـ}}$‖

❽ أ ب جـ ء شكل رباعي فيه : أ = (-١ ، -٢) ، ب = (٧ ، ٠) ، جـ = (٨ ، ٤) ، ء = (٠ ، ٢) أثبت أن $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ءجـ}}$

❾ أ ب جـ ء متوازي أضلاع فيه : أ = (٨ ، ٤) ، ب = (٥ ، ٦) ، جـ = (-١ ، ٥)

أوجد إحداثيي نقطة (ء)

❿ إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، ١) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (١ ، ٢) فأوجد ‖$\overrightarrow{\text{أب}}$‖

⓫ إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٢ ، ١) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٥ ، ٣) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (٤ ، -٢)

أوجد ‖٢$\overrightarrow{\text{بجـ}}$ − $\overrightarrow{\text{أب}}$‖

درس ٣ الصور المختلفة للمتجه

• الصورة القطبية لمتجه الموضع :

θ هي الزاوية المحصورة بين $\overrightarrow{\text{وأ}}$ ، $\overrightarrow{\text{وس}}$ الاتجاه الموجب لمحور السينات .

نوجد طا θ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ثم نوجد ‖$\overrightarrow{\text{وأ}}$‖

∴ $\overrightarrow{\text{وأ}}$ = (س ، ص) = (‖$\overrightarrow{\text{وأ}}$‖ ، θ)

وهى الصورة القطبية لمتجه الموضع .

• نلاحظ أن : س = ‖$\overrightarrow{\text{وأ}}$‖ حتا θ ، ص = ‖$\overrightarrow{\text{وأ}}$‖ حا θ

• **مثال (١) :** إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٨$\sqrt{3}$ ، ٨) أوجد الصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$

الحـــل

∵ ‖$\overrightarrow{\text{أ}}$‖ = طول $\overrightarrow{\text{وأ}}$ = $\sqrt{(8\sqrt{3})^2 + (8)^2}$ = $\sqrt{192 + 64}$ = $\sqrt{256}$

= ١٦ وحدة طول

∵ طا θ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = $\frac{8}{8\sqrt{3}}$ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ∴ ق($\hat{\theta}$) = طا$^{-1}$ ($\frac{1}{\sqrt{3}}$) = ٣٠° = $\frac{\pi}{6}$

∴ $\overrightarrow{\text{أ}}$ في الصورة القطبية = (١٦ ، $\frac{\pi}{6}$)

• **متجه الوحدة :** هو متجه معياره الوحدة .

التعبير عن المتجه بدلالة متجهة الوحدة الأساسيين $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$

• **تعريف : (١) متجه الوحدة الأساسى** $\overrightarrow{\text{س}}$: هو القطعة المستقيمة الموجهة التى مبدؤها نقطة الأصل ومعيارها الوحدة واتجاهها هو الاتجاه الموجب لمحور السينات حيث $\overrightarrow{\text{س}}$ = (١ ، ٠) .

(٢) متجه الوحدة الأساسى $\overrightarrow{\text{ص}}$: هو القطعة المستقيمة الموجهة التى مبدؤها نقطة الأصل ومعيارها الوحدة واتجاهها هو الاتجاه الموجب لمحور الصادات حيث $\overrightarrow{\text{ص}}$ = (٠ ، ١) .

∴ $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (س ، ص) = س $\overrightarrow{\text{س}}$ + ص $\overrightarrow{\text{ص}}$

• مثال (٢) : عبر عن المتجهات بدلالة الوحدة الأساسيين :

[أ] $\overrightarrow{\text{م}}$ = (٢ ، ٧)   [ب] $\overrightarrow{\text{ل}}$ = (−٥ ، ٠)   [جـ] $\overrightarrow{\text{ع}}$ = (٠ ، ٨)

الحل

[أ] $\overrightarrow{\text{م}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٧ $\overrightarrow{\text{ص}}$ [ب] $\overrightarrow{\text{ل}}$ = −٥ $\overrightarrow{\text{س}}$ [جـ] $\overrightarrow{\text{ع}}$ = ٨ $\overrightarrow{\text{ص}}$

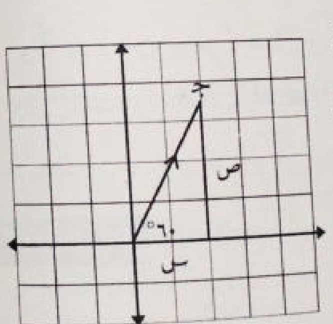
• مثال (٣) : أوجد بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين المتجه الذى يعبر عن كل من :

[أ] السرعة المنتظمة لسيارة تقطع ٣٠ كم كل ساعة فى اتجاه الغرب .

[ب] المسافة المقطوعة فى اتجاه الجنوب ٨٠ كم .

[جـ] قوة مقدارها ٦٠ نيوتن تؤثر فى نقطة مادية فى اتجاه ٦٠° فى شمال الشرق .

الحل



[أ] بفرض متجه الموضع $\overrightarrow{\text{ب}}$: ∴ $\overrightarrow{\text{ب}}$ = −٣٠ $\overrightarrow{\text{س}}$

[ب] بفرض متجه الموضع $\overrightarrow{\text{أ}}$: ∴ $\overrightarrow{\text{أ}}$ = −٨٠ $\overrightarrow{\text{ص}}$

[جـ] لاحظ أن متجه الموضع $\overrightarrow{\text{جـ}}$

$\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (٦٠ ، ٦٠°) الصورة القطبية .

∴ س = ٦٠ حتا ٦٠°

، ص = ٦٠ حا ٦٠°

س = ٦٠ × $\frac{1}{2}$ = ٣٠ ، ص = ٦٠ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = ٣٠ $\sqrt{3}$

∴ $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (٦٠ ، ٦٠°) = (٣٠ ، ٣٠ $\sqrt{3}$) = ٣٠ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٣٠ $\sqrt{3}$ $\overrightarrow{\text{ص}}$

تمرين (٣) : على الصورة المختلفة للمتجه

١ إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٤ $\sqrt{3}$ ، ٤) أوجد الصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$

٢ إذا كان $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (١٢ $\sqrt{2}$ ، $\frac{3\pi}{4}$) أوجد إحداثيى نقطة (جـ)

عبر عن كل من المتجهات التالية بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين ثم أوجد معياره

٣ $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (−٣ ، ٤)   ٤ $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٥ ، −١٢)

٥ $\overrightarrow{\text{ل}}$ = (−٣ ، −٦)   ٦ $\overrightarrow{\text{ع}}$ = (−٧ ، ٠)

٧ $\overrightarrow{\text{ف}}$ = (٠ ، ٤)

أوجد الصورة القطبية لكل من المتجهات التالية :

٨ $\overrightarrow{\text{م}}$ = ٣ $\sqrt{2}$ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٣ $\sqrt{2}$ $\overrightarrow{\text{ص}}$

٩ $\overrightarrow{\text{هـ}}$ = ٥ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٥ $\overrightarrow{\text{ص}}$

١٠ $\overrightarrow{\text{ك}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٣ $\sqrt{3}$ $\overrightarrow{\text{ص}}$

١١ إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، −٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (−٢ ، ٥) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (٠ ، ١١)

اكتب كلاً من المتجهات التالية بدلالة متجهة الوحدة الأساسيين :

٢ $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، ٣ $\overrightarrow{\text{جـ}}$ ، ($\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ − $\overrightarrow{\text{جـ}}$) ، $\frac{1}{2}$ ($\overrightarrow{\text{ب}}$ + $\overrightarrow{\text{جـ}}$)

أوجد بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين المتجه الذى يعبر عن :

١٢ سرعة منتظم ٦٠ كم/س فى اتجاه الغرب .

١٣ قوة مقدارها ٥٠ ث.كجم فى اتجاه ٣٠° شمال الشرق .

١٤ إزاحة جسم مسافة ٤٠ سم فى اتجاه الشمال الغربى .

درس ٤ — توازى متجهين وتعامدهما

إذا كان: $\overrightarrow{م}$ ، $\overrightarrow{هـ}$ متجهين غير صفريين

حيث $\overrightarrow{م} = (س_١ ، ص_١)$ ، $\overrightarrow{هـ} = (س_٢ ، ص_٢)$

(١) إذا كان: $\overrightarrow{م} // \overrightarrow{هـ}$

فإن $طا θ_١ = طا θ_٢$ يعنى $\frac{ص_١}{س_١} = \frac{ص_٢}{س_٢}$

ويكون: $س_١ ص_٢ = س_٢ ص_١$

∴ $س_١ص_٢ - س_٢ص_١ = ٠$ والعكس صحيح

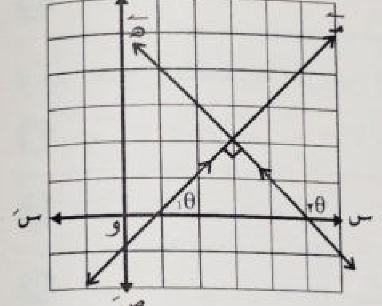
(٢) إذا كان: $\overrightarrow{م} \perp \overrightarrow{هـ}$

∴ $طا θ_١ × طا θ_٢ = -١$

∴ $\frac{ص_١}{س_١} × \frac{ص_٢}{س_٢} = -١$

∴ $س_١س_٢ + ص_١ص_٢ = ٠$

والعكس صحيح.



• مثال (١): إذا كان $\overrightarrow{أ} = (-٤ ، ٦)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٦ ، -٩)$ ، $\overrightarrow{ج} = (٣ ، ٢)$

أثبت أن: $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{ب} \perp \overrightarrow{ج}$ ، $\overrightarrow{ج} \perp \overrightarrow{أ}$

الحل

أولاً: الطرف الأيمن لشرط التوازى $= س_١ص_٢ - س_٢ص_١$

$= -٤ × -٩ - ٦ × ٦ = ٣٦ - ٣٦ =$ صفر = الأيسر

∴ $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$

ثانيًا: الطرف الأيمن لشرط التعامد $= س_١س_٢ + ص_١ص_٢$

$= ٦ × ٣ + -٩ × ٢ =$ صفر = الأيسر

∴ $\overrightarrow{ب} \perp \overrightarrow{ج}$

ثالثًا: لإثبات أن $\overrightarrow{ج} \perp \overrightarrow{أ}$

∴ $س_١س_٢ + ص_١ص_٢ = -٤ × ٣ + ٦ × ٢ =$ صفر = الأيسر

∴ $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ج}$

• مثال (٢): إذا كان $\overrightarrow{أ} = (٣ ، -٥)$ ، $\overrightarrow{ب} = (ك ، ٢)$ أوجد ك عندما:

(١) $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ (٢) $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$

الحل

(١) عندما $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ ∴ $س_١ص_٢ - س_٢ص_١ = ٠ \Leftarrow ٣ × ٢ - ك × -٥ = ٠$

∴ $٥ك = -٦$ ∴ $ك = \frac{-٦}{٥}$

(٢) عندما $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ ∴ $س_١س_٢ + ص_١ص_٢ = ٠ \Leftarrow ٣ × ك + ٢ × -٥ = ٠$

∴ $٣ك = ١٠$ ∴ $ك = \frac{١٠}{٣}$

تمرين (٤) : على توازى متجهين وتعامدهما

١. بيّن أن المتجهين $\overrightarrow{أ} = ٣\overrightarrow{س} - ٥\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = -٦\overrightarrow{س} + ١٠\overrightarrow{ص}$ متوازيان.

٢. بيّن أن المتجهين $\overrightarrow{أ} = (٢ ، ٤)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٤ ، ٨)$ متوازيان.

٣. بيّن أن المتجهين $\overrightarrow{أ} = (٣ ، -٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (-٣ ، ٢)$ متوازيان.

٤. بيّن أن المتجهين $\overrightarrow{أ} = (-١٠ ، ٢٤)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٦ ، -٨)$ غير متوازيين.

٥. بيّن أن المتجهين $\overrightarrow{أ} = ٢\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = (-٦ ، ٣)$ متعامدان.

٦. بيّن أن المتجهين $\overrightarrow{ب} = -٦\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ج} = (٤ ، ٨)$ متعامدان.

٧. بيّن أن المتجهين $\overrightarrow{ب} = (-٢ ، ١)$ ، $\overrightarrow{ج} = (٢ ، -٢)$ غير متعامدين.

٨. إذا كان: $\overrightarrow{أ} = (٢ ، ٣)$ ، $\overrightarrow{ب} = (١ ، ٥)$ ، $\overrightarrow{ج} = (٣ ، ١)$
بيّن أن $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{ج}$ متوازيان.

٩. إذا كان: $\overrightarrow{أ} = (٢ ، ٤)$ ، $\overrightarrow{ب} = (١ ، ٤)$ ، $\overrightarrow{ج} = (-٥ ، -٢)$
بيّن أن $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{ج}$ متعامدان.

١٠. إذا كان: $\overrightarrow{أ} = (١ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٣ ، ٢)$ بين أن $٢\overrightarrow{أ} + ٣\overrightarrow{ب}$ ،
والمتجه $\overrightarrow{ج} = (-١١ ، -١٠)$ متوازيان.

١١. إذا كان: $\overrightarrow{أ} = (٢ ، ١)$ ، $\overrightarrow{ب} = (\frac{-٧}{٥} ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ج} = (٣ ، ٦)$
فأثبت أن: $(\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب})$ يوازى $(\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{ج})$

أوجد العدد (ك) إذا كان ذلك ممكنا بحيث تتحقق الشروط المعطاة :

- ١٢ $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٢ ، ك) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٣ ، −١) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متعامدين .
- ١٣ $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (ك ، −٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (ك ، ٨) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متعامدين .
- ١٤ $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، −١) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (ك ، ٢) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متوازيين .
- ١٥ $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٢ ، ٥) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٠ ، ك) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متوازيين .
- ١٦ $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (−ك ، −٤) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (١ ، ك) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متوازيين .
- ١٧ $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (١ ، −٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٣ ، ك) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متعامدين .
- ١٨ $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٢ ، −١) ، ب = (٣ ، ٤) ، $\overrightarrow{\text{ج}}$ = (ك ، ١٥) أثبت أن: $\overrightarrow{\text{ج}}$ ، ($\overrightarrow{\text{ب}}$ − $\overrightarrow{\text{أ}}$) متوازيان
- ١٩ بين أن $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٦ ، ٣٠°) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٤ ، ١٢٠°) متعامدان .
- ٢٠ بين أن $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٤ ، ٣٠°) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٦ ، ٣٠°) متوازيان.

درس ٥ العمليات على المتجهات

• قاعدة المثلث لجمع متجهين (علاقة شال) :

$\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب ج}} = \overrightarrow{\text{أج}}$

• ملحوظة (١) : ∵ $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب أ}} = \overrightarrow{\text{أأ}} = \overrightarrow{0}$

∴ $\overrightarrow{\text{أب}}$ هي المعكوس الجمعي لـ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$

أي أن: $\overrightarrow{\text{ب أ}} = -\overrightarrow{\text{أب}}$

> **ملحوظة :** لحفظ القانون كما لو كنا حذفنا ب مع ب يتبقى $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ج}} = \overrightarrow{\text{أج}}$

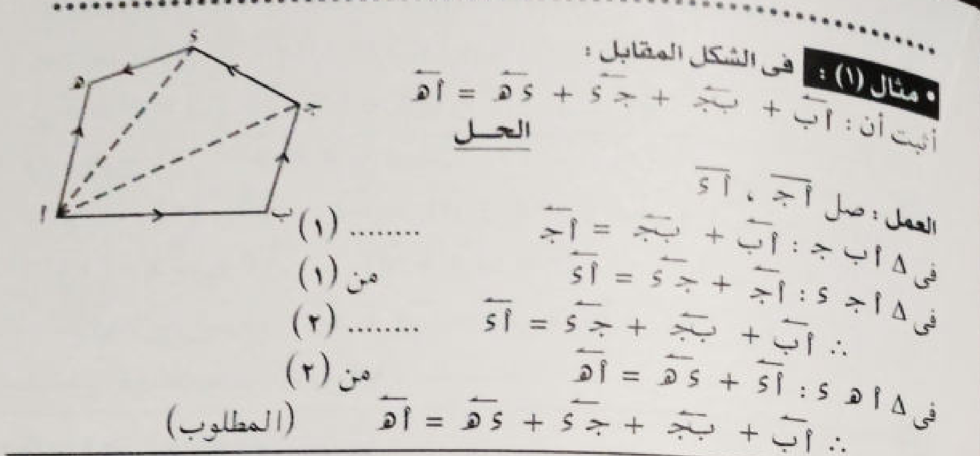
• مثال (١) : في أي مثلث أ ب ج ، أثبت أن : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب ج}} + \overrightarrow{\text{ج أ}} = \overrightarrow{0}$

الحـل

∵ $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب ج}} = \overrightarrow{\text{أج}}$ ⇐ $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب ج}} - \overrightarrow{\text{أج}} = \overrightarrow{0}$

∵ $\overrightarrow{\text{أج}} = -\overrightarrow{\text{ج أ}}$ ⇐ ∴ $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب ج}} + \overrightarrow{\text{ج أ}} = \overrightarrow{0}$

• مثال (١) : في الشكل المقابل :
أثبت أن : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب ج}} + \overrightarrow{\text{ج د}} + \overrightarrow{\text{د هـ}} = \overrightarrow{\text{أهـ}}$



الحـل

العمل : صل $\overline{\text{أج}}$ ، $\overline{\text{أد}}$

في Δ أ ب ج : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب ج}} = \overrightarrow{\text{أج}}$ .... (١)

في Δ أ ج د : $\overrightarrow{\text{أج}} + \overrightarrow{\text{ج د}} = \overrightarrow{\text{أد}}$ من (١)

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب ج}} + \overrightarrow{\text{ج د}} = \overrightarrow{\text{أد}}$ .... (٢)

في Δ أ هـ د : $\overrightarrow{\text{أد}} + \overrightarrow{\text{د هـ}} = \overrightarrow{\text{أهـ}}$ من (٢)

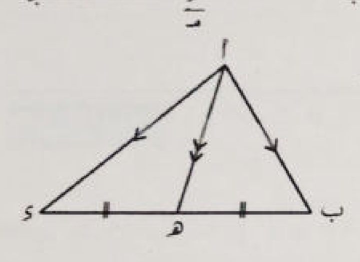
∴ $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب ج}} + \overrightarrow{\text{ج د}} + \overrightarrow{\text{د هـ}} = \overrightarrow{\text{أهـ}}$ (المطلوب)

• قاعدة متوازي الأضلاع لجمع متجهين :

∵ $\overrightarrow{\text{م}} + \overrightarrow{\text{ن}} = \overrightarrow{\text{ج ب}} + \overrightarrow{\text{ج د}}$

∵ $\overrightarrow{\text{ج د}} = \overrightarrow{\text{ب أ}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{ج ب}} + \overrightarrow{\text{ب أ}} = \overrightarrow{\text{ج أ}}$

لاحظ أن : $\overline{\text{ج أ}}$ قطر



• نتائج : (١) $\overrightarrow{\text{ج د}} + \overrightarrow{\text{ج ب}} = \overrightarrow{\text{ج أ}} = \overrightarrow{\text{ج ب}} + \overrightarrow{\text{ج د}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ن}} + \overrightarrow{\text{م}} = \overrightarrow{\text{م}} + \overrightarrow{\text{ن}}$

(٢) في Δ أ ب د : إذا كانت هـ منتصف $\overline{\text{ب د}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أد}} = ٢\overrightarrow{\text{أهـ}}$

• مثال (٢) : في أي شكل رباعي أ ب ج د ، أثبت أن : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{د ج}} = \overrightarrow{\text{أج}} + \overrightarrow{\text{د ب}}$

الحـل

يوجد عدد كبير من الحلول لهذه المسائل

فالحل ليس وحيد

في Δ أ ج د : $\overrightarrow{\text{أد}} + \overrightarrow{\text{د ج}} = \overrightarrow{\text{أج}}$ ..... (١)

في Δ د ب أ : $\overrightarrow{\text{د أ}} + \overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{د ب}}$ .... (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ $\overrightarrow{\text{أد}} + \overrightarrow{\text{د ج}} + \overrightarrow{\text{د أ}} + \overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{أج}} + \overrightarrow{\text{د ب}}$ ..... (١)

∵ $\overrightarrow{\text{أد}} = -\overrightarrow{\text{د أ}}$ ∴ تحذف $\overrightarrow{\text{أد}}$ مع $\overrightarrow{\text{د أ}}$ من (٢)

∴ $\overrightarrow{\text{د ج}} + \overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{أج}} + \overrightarrow{\text{د ب}}$

حل آخر: بفرض أن أج ∩ ب د = {هـ}

في ∆ هـ ج د: ∵ د هـ + هـ ج = د ج ...... (١)

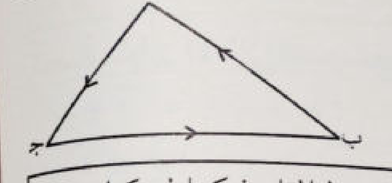
في ∆ هـ ب أ: ∵ أ هـ + هـ ب = أ ب ...... (٢)

بجمع (١)، (٢): د هـ + هـ ج + أ هـ + هـ ب = د ج + أ ب

∵ أ هـ + هـ ج = أ ج ، د هـ + هـ ب = د ب

∴ الطرف الأيمن يصبح: د ج + أ ب = أ ج + د ب

حل آخر: في كتاب الوزارة ص٧٣ .



• قاعدة طرح المتجهات هندسيًا

أ ب - أ ج = ج ب

وهي مرتبطة بالقاعدة: أ ب = ب - أ

ملحوظة: لحفظ القانون كما لو كنا حذفنا ب مع ب يتبقى ب - ج = ج ب .

• مثال (٤): إذا كان: ٣ هـ د - ٢ أ ب = ٣ ج ب + ٥ ب أ أثبت أن: هـ د = ج أ

الحـل

٣ هـ د - ٢ (ب - أ) = ٣ (ب - ج) + ٥ (أ - ب)

٣ هـ د - ٢ ب + ٢ أ = ٣ ب - ٣ ج + ٥ أ - ٥ ب

٣ هـ د = ٣ ب - ٣ ج + ٥ أ - ٥ ب + ٢ ب - ٢ أ

= ٣ أ - ٣ ج = ٣ (أ - ج) = ٣ ج أ

∴ ٣ هـ د = ٣ ج أ ∴ هـ د = ج أ

يوجد حل آخر في كتاب الوزارة ص٧٥

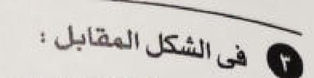
تمرين (٥): على العمليات على المتجهات

١ أ ب ج د شكل رباعي فيه: ب ج = ٣ أ د ، أثبت أن:

أولاً: أ ب ج د شبه منحرف. ثانيًا: أ ج + ب د = ٤ أ د

٢ أ ب ج د متوازي أضلاع فيه (هـ) منتصف ب ج ، أثبت أن:

أ ب + أ د + د ج = ٢ أ هـ

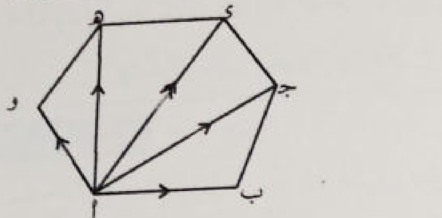


٣ **في الشكل المقابل:**

أ ب ج د هـ و مسدس

أثبت أن:

أ ب + أ ج + أ هـ + أ و = ٢ أ د



٤ في أي مضلع رؤوسه النقط أ ، ب ، ج ، د ، هـ ، أثبت أن:

أ ب + ب ج + ج د + د هـ + هـ أ = ٠

٥ أ ب ج د شكل رباعي فيه: ٢ ب ج = ٥ أ د ، أثبت أن:

أولاً: ٢ أ ج + ٢ ب د = ٧ أ د ثانيًا: ٢ أ ب - ٢ د ج = ٣ د أ

٦ في أي شكل رباعي أ ب ج د ، أثبت أن: د ب - أ ج = د أ - ب ج

٧ إذا كان أ ب ج د متوازي أضلاع ، فأثبت أن:

أولاً: ٢ أ م = أ ب + أ د حيث م نقطة تقاطع قطريه.

ثانيًا: هـ د + هـ ب = هـ أ + هـ ج حيث هـ أي نقطة في المستوى.

٨ أ ب ج مثلث ، د نقطة تقع على ب ج بحيث ٢ ب د = ٣ د ج

أثبت أن: ٥ أ د = ٢ أ ب + ٣ أ ج

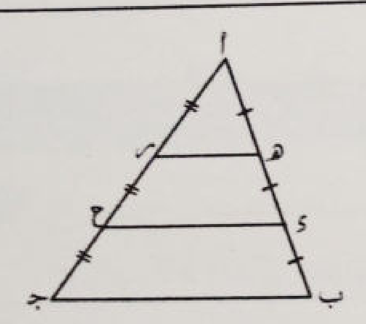
٩ **في الشكل المقابل:**

أ هـ = هـ د = د ب ،

أ ر = ر ح = ح ج ،

أثبت أن:

ب ج = د ح + هـ ر



درس ٦ تطبيقات على المتجهات

• **قاعدة:** إذا كان $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ؤجـ}}$ يؤدى إلى شيئين $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{ؤجـ}}$ ، أب = ؤ جـ
والعكس صحيح ، إذا كان $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{ؤجـ}}$ ، أب = ؤ جـ فإن $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ؤجـ}}$

• **مثال (١):** باستخدام المتجهات أثبت أن قطرى متوازى الأضلاع ينصف كل منهما الآخر .

الحـل

العمل : نصل $\overline{\text{أجـ}}$ ونأخذ عليه نقطة تنصف (م)
نصل $\overline{\text{ب م}}$ ، $\overline{\text{م ؤ}}$

المطلوب : إثبات أن ب ، م ، ؤ على استقامة واحدة
، م منتصف $\overline{\text{ب ؤ}}$

البرهان : ∵ (م) منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{أم}} = \overrightarrow{\text{مجـ}}$ (أم = م جـ ، $\overline{\text{أم}} \parallel \overline{\text{مجـ}}$)

فى △ ب أ م : $\overrightarrow{\text{ب أ}} + \overrightarrow{\text{أم}} = \overrightarrow{\text{ب م}}$ ——— (١)

فى △ جـ م ؤ : $\overrightarrow{\text{مجـ}} + \overrightarrow{\text{جـ ؤ}} = \overrightarrow{\text{م ؤ}}$ ——— (٢)

$\overrightarrow{\text{أم}} = \overrightarrow{\text{مجـ}}$ عملاً

$\overrightarrow{\text{ب أ}} = \overrightarrow{\text{جـ ؤ}}$ لأنهما ضلعان متوازيان ومتساويان فى متوازى الأضلاع .

من (١) ، (٢) ∴ $\overrightarrow{\text{ب م}} = \overrightarrow{\text{م ؤ}}$ ∴ $\overline{\text{ب م}} \parallel \overline{\text{م ؤ}}$ ويشتركان فى نقطة واحدة (م)

∴ ب ، م ، ؤ على استقامة واحدة ، وينتج أيضاً أن : ب م = م ؤ

∴ م منتصف $\overline{\text{ب ؤ}}$ ∴ القطران $\overline{\text{أجـ}}$ ، $\overline{\text{ب ؤ}}$ ينصف كل منهما الآخر .

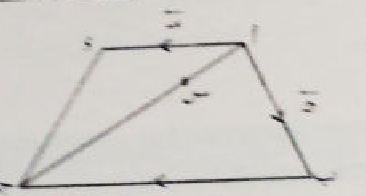
تمرين (٦) : على تطبيقات المتجهات

١ باستخدام المتجهات أثبت أنه إذا تساوى وتوازى ضلعان متقابلان فى الشكل الرباعى كان الشكل متوازى أضلاع .

٢ باستخدام المتجهات أثبت أن القطعة المستقيم المرسومة بين منتصفى ضلعين فى مثلث توازى الضلع الثالث .

٣ أ ب جـ ؤ شكل رباعى ، س ، ص ، ع ، ل منتصفات الأضلاع $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{بجـ}}$ ، $\overline{\text{جـ ؤ}}$ ، $\overline{\text{ؤ أ}}$ على الترتيب ، باستخدام المتجهات أثبت أن :
أولاً : الشكل س ص ع ل متوازى أضلاع .
ثانياً : محيط الشكل س ص ع ل يساوى مجموع طول قطرى الشكل الرباعى أ ب جـ ؤ

٤ فى الشكل المقابل :



أ ب جـ ؤ شبه منحرف
$\overline{\text{أ ؤ}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$ ، أ ؤ $= \frac{1}{2}$ ب جـ
، $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ل}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ ؤ}} = \overrightarrow{\text{م}}$
أولاً : عبر بدلالة $\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{ل}}$ عن كل من $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ؤجـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ؤب}}$
ثانياً : إذا كانت س ∈ $\overline{\text{أجـ}}$ حيث أ س $= \frac{1}{3}$ أ جـ
أثبت أن النقط ؤ ، س ، ب على استقامة واحدة .

درس ٧ نشاط تطبيقات فيزيائية (لا يمتحن فيه الطالب)

• **أولاً : القوة المحصلة :**

مقدمة : إذا أثرت قوى على جسم كما بالشكل

ق١ = ٥٠ نيوتن ، ق٢ = ٣٠ نيوتن

لإيجاد محصلة هذين القوتين .
نأخذ متجه وحدة $\overrightarrow{\text{ى}}$ وليكن فى اتجاه الشرق ∴ $\overrightarrow{\text{ق١}} = ٥٠ \overrightarrow{\text{ى}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق٢}} = -٣٠ \overrightarrow{\text{ى}}$
∴ المحصلة = $\overrightarrow{\text{ق١}} + \overrightarrow{\text{ق٢}} = ٥٠ \overrightarrow{\text{ى}} + (-٣٠ \overrightarrow{\text{ى}}) = ٢٠ \overrightarrow{\text{ى}}$

• **مثال (٢) : فى الشكل المقابل :**

ق١ = ٨٠ نيوتن ، ق٢ = ١٠ نيوتن

أثرت على جسم قوة فى اتجاه الشرق ٨٠ نيوتن ، وكانت قوة الاحتكاك فى الاتجاه المضاد مقدارها ١٠ نيوتن ، أوجد محصلة القوتين .

الحـل

نأخذ متجه وحدة $\overrightarrow{\text{ى}}$ فى أى اتجاه وليكن فى اتجاه الشرق
∴ $\overrightarrow{\text{ق١}} = ٨٠ \overrightarrow{\text{ى}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق٢}} = -١٠ \overrightarrow{\text{ى}}$
∴ المحصلة $(\overrightarrow{\text{ح}}) = \overrightarrow{\text{ق١}} + \overrightarrow{\text{ق٢}} = ٨٠ \overrightarrow{\text{ى}} + (-١٠ \overrightarrow{\text{ى}}) = ٧٠ \overrightarrow{\text{ى}}$

• مثال (٢): تؤثر القوى $\overrightarrow{ق_١} = ٢\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$ في نقطة مادية ، أوجد المحصلة مقداراً واتجاهاً (القوى مقاسة بالنيوتن)

الحل

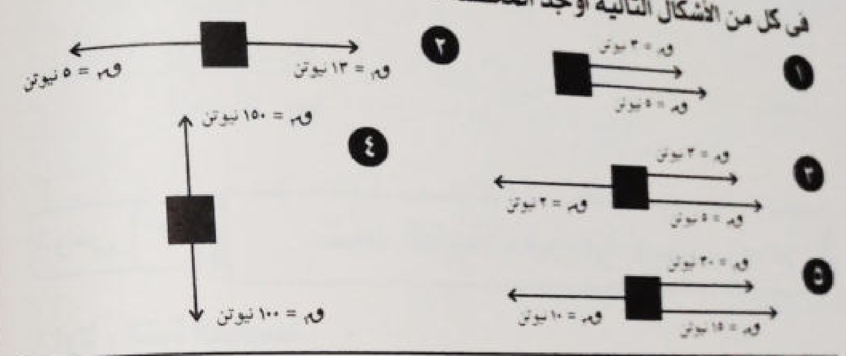
$\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢} = ٢\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص} + \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} = ٣\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص} = (٣ ، ٤)$

مقدار المحصلة $= \|\overrightarrow{ح}\| = \sqrt{٩ + ١٦} = ٥$ نيوتن

$ظا\ \theta = \frac{ص}{س} = \frac{٤}{٣}$ $\therefore$ $ق(\theta) = ظا^{-١}\left(\frac{٤}{٣}\right) = ٥٣^\circ\ ٧'\ ٤٨''$

تمرين (٧): على تطبيقات فيزيائية (محصلة القوى)

في كل من الأشكال التالية أوجد المحصلة:



٦ تؤثر القوى $\overrightarrow{ق_١} = ٣\overrightarrow{س} + ٧\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = ٢\overrightarrow{س} + ٥\overrightarrow{ص}$ في نقطة مادية أوجد مقدار واتجاه المحصلة علماً بأن القوى مقاسة بالنيوتن .

٧ تؤثر القوى $\overrightarrow{ق_١} = ٢\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = ٣\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٣} = \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$ في نقطة مادية ، أوجد مقدار واتجاه المحصلة علماً بأن القوى مقاسة بـ ث.كجم .

٨ تؤثر القوى $\overrightarrow{ق_١} = ٣\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = -٢\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٣} = ٢\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}$ في نقطة مادية ، أوجد مقدار واتجاه المحصلة علماً بأن القوى مقاسة بالنيوتن .

٩ تؤثر القوى $\overrightarrow{ق_١} = ٢\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = أ\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٣} = ٥\overrightarrow{س} + ب\overrightarrow{ص}$ في نقطة مادية ، أوجد قيمتي أ ، ب إذا كانت المحصلة

[أ] $\overrightarrow{ح} = ٥\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص}$

[ب] $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{0}$

ما معنى أن محصلة عدة قوى متلاقية في نقطة واحدة $= \overrightarrow{0}$

• ثانياً : السرعة النسبية

السرعة النسبية لجسم (ب) بالنسبة إلى جسم (أ) آخر ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{ع_{بأ}}$

هي السرعة التي يبدو الجسم (ب) متحركاً بها للجسم (أ)

فإذا كان $\overrightarrow{ع_أ}$ سرعة السيارة أ الفعلية ، $\overrightarrow{ع_ب}$ سرعة السيارة ب الفعلية

فإن : $\overrightarrow{ع_{بأ}} = \overrightarrow{ع_ب} - \overrightarrow{ع_أ}$ أيضاً $\overrightarrow{ع_{أب}} = \overrightarrow{ع_أ} - \overrightarrow{ع_ب}$

• مثال (١): تتحرك سيارة أ على طريق مستقيم بسرعة ٥٠ كم/س وتتحرك السيارة (ب) على نفس الطريق بسرعة ٨٠ كم/س ، أوجد سرعة (أ) بالنسبة إلى (ب) عندما :

أولاً : تتحرك السيارتان في اتجاه واحد . ثانياً : تتحرك السيارتان في اتجاهين متضادين .

الحل

أولاً : تتحركان في اتجاه واحد :

باعتبار $\overrightarrow{ى}$ في اتجاه السيارتين

$\therefore \overrightarrow{ع_أ} = ٦٠\overrightarrow{ى}$

، $\overrightarrow{ع_ب} = ٨٠\overrightarrow{ى}$

$\overrightarrow{ع_{أب}} = \overrightarrow{ع_أ} - \overrightarrow{ع_ب} = ٥٠\overrightarrow{ى} - ٨٠\overrightarrow{ى}$

$= -٣٠\overrightarrow{ى}$

ثانياً : تتحركان في اتجاهين متضادين :

باعتبار $\overrightarrow{ى}$ في اتجاه السيارة ب

$\therefore \overrightarrow{ع_ب} = ٨٠\overrightarrow{ى}$

، $\overrightarrow{ع_أ} = -٥٠\overrightarrow{ى}$

$\overrightarrow{ع_{أب}} = \overrightarrow{ع_أ} - \overrightarrow{ع_ب} = -٥٠\overrightarrow{ى} - ٨٠\overrightarrow{ى}$

$= -١٣٠\overrightarrow{ى}$

تمرين (٨) : على (السرعة النسبية)

١ تتحرك سيارة أ على طريق مستقيم بسرعة ٣٠ كم/س وتتحرك السيارة (ب) على نفس الطريق بسرعة ٧٠ كم/س ، أوجد سرعة (ب) بالنسبة إلى (أ) عندما تتحرك السيارتان في : أولاً : اتجاه واحد . ثانياً : اتجاهين متضادين .

٢ تتحرك سيارة على طريق مستقيم بسرعة ٩٠ كم/س وتحركت دراجة بخارية على نفس الطريق بسرعة ٤٠ كم/س ، أوجد سرعة الدراجة البخارية بالنسبة إلى السيارة عندما يتحرك في : أولاً : اتجاه واحد . ثانياً : اتجاهين متضادين .

٣ تتحرك سيارة أ تراقب السرعة على الطريق بسرعة ٣٠ كم/س ، راقبت سيارة (ب) قادمة في الاتجاه المضاد ، فبدت كأنها تتحرك بسرعة ١١٠ كم/س . فما هي السرعة الفعلية للسيارة الثانية (ب) ؟



درس ١ تقسيم قطعة مستقيمة

(١) التقسيم من الداخل:

ج تقسم $\overline{أب}$ من الداخل

بنسبة : $ل_2 : ل_1$

∴ القانون : $\vec{ر} = \dfrac{ل_1 \vec{ر}_1 + ل_2 \vec{ر}_2}{ل_1 + ل_2}$

تسمى الصيغة المتجهة

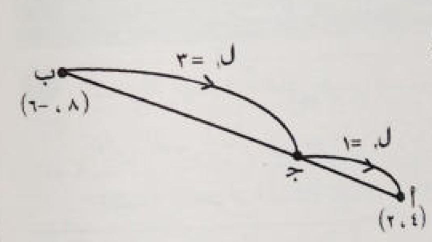
ومنها $(س ، ص) = \left(\dfrac{ل_1 س_1 + ل_2 س_2}{ل_1 + ل_2} ، \dfrac{ل_1 ص_1 + ل_2 ص_2}{ل_1 + ل_2} \right)$

وتسمى الصيغة الإحداثية :

$س = \dfrac{ل_1 س_1 + ل_2 س_2}{ل_1 + ل_2}$ ، $ص = \dfrac{ل_1 ص_1 + ل_2 ص_2}{ل_1 + ل_2}$

• مثال (١) : إذا كانت أ(٤ ، ٢) ، ب = (٨ ، −٦) أوجد إحداثيي النقطة ج التي تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ١ : ٣

الحل



$\vec{ر} = \dfrac{ل_1 \vec{ر}_1 + ل_2 \vec{ر}_2}{ل_1 + ل_2}$

∴ $\vec{ر} = \dfrac{٣ \times (٤ ، ٢) + ١ \times (٨ ، −٦)}{١ + ٣}$

∴ $\vec{ر} = \dfrac{(٢٠ ، ٠)}{٤} = (٥ ، ٠)$

∴ إحداثيا نقطة ج هى (٥ ، ٠)

(٢) التقسيم من الخارج:

• مثال (٢) : إذا كانت أ(٢ ، ٥) ، ب = (٣ ، −٢) أوجد إحداثيي النقطة ج التي تقسم $\overline{أب}$ من الخارج بنسبة ٣ : ٢

الحل

$\vec{ر}_1 = (٢ ، ٥)$ ، $\vec{ر}_2 = (٣ ، −٢)$

∴ $ل_2 : ل_1 = ٣ : −٢$

$\vec{ر} = \dfrac{ل_2 \vec{ر}_2 + ل_1 \vec{ر}_1}{ل_2 + ل_1}$

∴ $\vec{ر} = \dfrac{٣(٣ ، −٢) − ٢(٢ ، ٥)}{٣ − ٢}$ ∴ $\vec{ر} = (٥ ، −١٦)$

• نتائج :

(١) إذا كانت ج(س ، ص) منتصف القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ فإن :

$س = \dfrac{س_1 + س_2}{٢}$ ، $ص = \dfrac{ص_1 + ص_2}{٢}$

(٢) نقطة تلاقي المتوسطات : $م = \left(\dfrac{س_1 + س_2 + س_3}{٣} ، \dfrac{ص_1 + ص_2 + ص_3}{٣} \right)$

ثالثاً : إيجاد نسبة التقسيم إذا كانت ج تقسم $\overline{أب}$ بنسبة $ل_2 : ل_1$

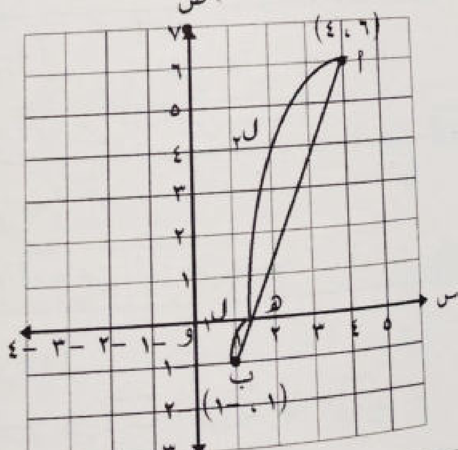
وكان (١) نسبة التقسيم : $\dfrac{ل_2}{ل_1} > ٠$ كان التقسيم من الداخل .

(٢) نسبة التقسيم : $\dfrac{ل_2}{ل_1} < ٠$ كان التقسيم من الخارج .

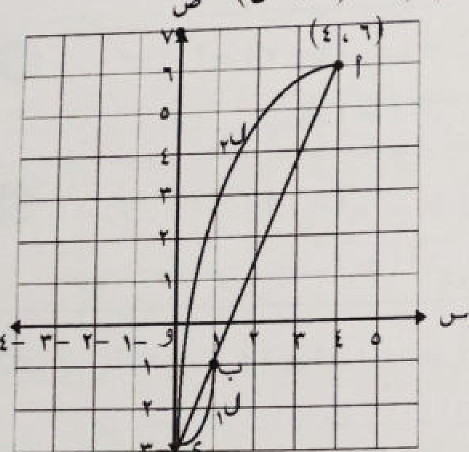
• مثال (٢) : إذا كانت أ = (٦ ، ٤) ، ب = (١ ، −١) ، أوجد النسبة التى تقسم $\overline{أب}$ بمحور السينات ومحور الصادات مبيناً نوع التقسيم فى كل حالة ثم أوجد إحداثي نقطة التقسيم في كل حالة .

الحل

بفرض أن محور السينات يقطع $\overline{أب}$ فى نقطة (هـ) = (س ، ٠)



بفرض أن محور السينات يقطع $\overline{أب}$ فى نقطة (ء) = (٠ ، ص)



∴ $\text{ص} = \frac{\text{ل}_1\text{ص}_2 + \text{ل}_2\text{ص}_1}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}$

∴ $\text{صفر} = \frac{\text{ل}_1 \times ٤ + \text{ل}_2 \times -١}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}$

∴ $٤\text{ل}_1 = \text{ل}_2$

∴ $\frac{\text{ل}_1}{\text{ل}_2} = \frac{١}{٤}$ ، $\frac{\text{ل}_2}{\text{ل}_1} = \frac{٤}{١} > ٠$

وهي أكبر من الصفر

∴ التقسيم من الداخل

بنسبة $\text{ل}_2 : \text{ل}_1 = ٤ : ١$

إحداثي نقطة هـ :

حيث $\text{س} = \frac{\text{ل}_1\text{س}_2 + \text{ل}_2\text{س}_1}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}$

$= \frac{١ \times ٦ + ٤ \times ١}{٤ + ١} = ٢$

∴ هـ = (٢ ، ٠)

ء = (٠ ، ص)

∴ $\text{س} = \frac{\text{ل}_1\text{س}_2 + \text{ل}_2\text{س}_1}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}$

∴ $\text{صفر} = \frac{\text{ل}_1 \times ٦ + \text{ل}_2 \times ١}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}$

∴ $٦\text{ل}_1 = -\text{ل}_2$

∴ $\frac{\text{ل}_2}{\text{ل}_1} = \frac{-٦}{١} < ٠$

∴ التقسيم من الخارج بنسبة ٦ : ١

، إحداثيا النقطة ء هما (٠ ، ص)

∴ $\text{ص} = \frac{\text{ل}_1\text{ص}_2 + \text{ل}_2\text{ص}_1}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}$

$= \frac{٦ \times -١ - ١ \times ٤}{٦ - ١} = \frac{-١٠}{٥}$

$= -٢$

∴ ء = (٠ ، -٢)

تمرين (١) : على تقسيم قطعة مستقيمة

أولاً : التقسيم من الداخل :

❶ إذا كان : أ = (-١ ، ٧) ، ب = (٥ ، ٢)
أوجد إحداثي النقطة (جـ) التي تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل بنسبة ٣ : ٢

❷ إذا كان : أ = (٢ ، ٥) ، ب = (-٥ ، ٢)
أوجد إحداثي النقطة (جـ) التي تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل بنسبة ١ : ٣

❸ إذا كان : أ = (٢ ، ٥) ، ب = (-١ ، -١)
أوجد إحداثي النقطة (جـ) التي تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل بنسبة ٢ : ١

❹ إذا كان : أ = (٤ ، ٢) ، ب = (-٥ ، -١)
أوجد إحداثيات النقطة (جـ) إذا كان جـ ∈ $\overline{\text{أب}}$ ، ٥$\overline{\text{أجـ}}$ = ٣$\overline{\text{أب}}$

❺ أوجد إحداثيات النقطة (جـ) التي تقع عند ربع المسافة بين :
أ = (-١ ، ١) إلى ب = (٧ ، ٥)

ثانياً : التقسيم من الخارج :

❻ أوجد إحداثي النقطة ء حيث ء ∈ $\overleftrightarrow{\text{بأ}}$ ، ء ∉ $\overline{\text{أب}}$ ، أء : ءب = ١ : ٣
وكانت أ = (٣ ، ٤) ، ب = (-٥ ، ٢)

❼ إذا كانت أ = (-٧ ، ٢) ، ب = (٢ ، ٥) أوجد النقطة (جـ) حيث جـ ∈ $\overrightarrow{\text{بأ}}$
، جـ ∉ $\overline{\text{بأ}}$ والتي بعدها عن ب يساوي ثلاثة أمثال بعدها عن أ .

ثالثاً : مسائل التقسيم من الداخل والخارج :

❽ إذا كانت أ = (٣ ، -٢) ، ب = (-٢ ، ٤) أوجد النسبة التي تقسم بها
جـ(٨ ، -٨) القطعة المستقيمة $\overline{\text{أب}}$ مبيناً نوع التقسيم .

❾ أوجد النسبة التي تنقسم بها $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ بكل من نقطتي تقاطعهما مع محوري الإحداثيات
إذا كان أ = (٣ ، -٢) ، ب = (-٢ ، ٥) مع إيجاد تلك النقط .

❿ إذا كان أ = (٥ ، ٢) ، ب = (-٣ ، ١) أوجد النسبة التي ينقسم بها $\overleftrightarrow{\text{أب}}$
بمحور السينات ثم بمحور الصادات على الترتيب مع إيجاد نقط تقاطعهما مع
المحورين .

⓫ إذا كانت : أ = (٢ ، ٤) ، ب = (٣ ، ٦) ، جـ = (٥ ، ١٠) على استقامة واحدة
أوجد :
أولاً : النسبة التي تقسم بها أ القطعة المستقيمة $\overline{\text{بجـ}}$ مبيناً نوع التقسيم .
ثانياً : النسبة التي تقسم بها ب القطعة المستقيمة $\overline{\text{جـأ}}$ مبيناً نوع التقسيم .
ثالثاً : النسبة التي تقسم بها جـ القطعة المستقيمة $\overline{\text{أب}}$ مبيناً نوع التقسيم .

⓬ إذا كانت أ = (-٤ ، ٢) ، ب = (١ ، -٢) ، جـ = (١ ، ٦)
أوجد نقطة تلاقي المتوسطات المثلث أ ب جـ

⓭ إذا كانت أ = (٣ ، ٤) ، ب = (-٥ ، ٢) إذا كانت النقطة جـ (٧ ، ص)
تقسم $\overline{\text{أب}}$ ، أوجد النسبة التي تقسم بها النقطة جـ القطعة المستقيمة
الموجهة $\overrightarrow{\text{أب}}$ مبيناً نوع التقسيم ثم أوجد قيمة (ص) .

درس ٢ — مراجعة على معادلة الخط المستقيم

(١) ا س + ب ص + جـ = ٠ تسمى بالصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم .

(٢) إذا كان : س = ا فهى معادلة مستقيم يوازى محور الصادات ويمر بالنقطة (ا ، ٠)

(٣) إذا كان : ص = ب فهى معادلة مستقيم يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، ب)

(٤) ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين : ($س_1$ ، $ص_1$) ، ($س_2$ ، $ص_2$)

ميل الخط المستقيم = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ = طا هـ

حيث هـ هى الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

ميل الخط المستقيم : ا س + ب ص + جـ = ٠ هى م = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-ا}{ب}$

(٥) إذا كان : $م_1$ = $م_2$ فإن المستقيمين متوازيان .

وإذا كان $م_1$ × $م_2$ = -١ فإن المستقيمين متعامدان .

(٦) صورة معادلة المستقيم بدلالة الميل (م) والجزء المقطوع (جـ) من محور الصادات .

ص = م س + جـ

• مثال (١) : أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٥) ، (٨ ، ٢) وقياس الزاوية التى يصنعها المستقيم مع محور السينات الموجب .

الحـل

الميل = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ = $\frac{٢ - ٥}{٨ - ٣}$ = $\frac{-٣}{٥}$

∴ طا هـ = $\frac{-٣}{٥}$ ∴ ق(هـ) = ١٤٩° ٢َ ١٠ًَ

• مثال (٢) : أوجد ميل الخط المستقيم : ٥س - ٤ص + ٣ = ٠ بطريقتين ثم أوجد الجزء المقطوع من محور الصادات .

الحـل

∵ ميل المستقيم = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-٥}{-٤}$ = $\frac{٥}{٤}$

ثانيًا : ∵ ٤ص = ٥س + ٣ بالقسمة على ٤

∴ ص = $\frac{٥}{٤}$س + $\frac{٣}{٤}$

∴ الميل = $\frac{٥}{٤}$ والجزء المقطوع من محور الصادات = $\frac{٣}{٤}$

• مثال (٣) : أوجد نقاط تقاطع المستقيم التالى مع محورى الإحداثيات :

٢س - ٥ص + ٣ = ٠

الحـل

ضع س = ٠ ∴ -٥ص = ٣ ∴ ص = $\frac{-٣}{٥}$

∴ نقطة التقاطع مع محورى الصادات (٠ ، $\frac{-٣}{٥}$)

ضع ص = ٠ ∴ ٢ص = -٣ ∴ ص = $\frac{-٣}{٢}$

∴ نقطة التقاطع مع محورى السينات ($\frac{-٣}{٢}$ ، ٠)

• مثال (٤) : أوجد معادلة المستقيم الذى ميله ٣ ويمر بالنقطة (٤ ، ٥)

الحـل

ص = م س + جـ ∴ ص = ٣س + جـ ∵ (٤ ، ٥) تمر بالمستقيم

∴ تحققه ∴ ٥ = ٣ × ٤ + جـ ∴ جـ = -٧

∴ معادلة المستقيم : ص = ٣س - ٧

• مثال (٥) : أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٤) ، (٥ ، ٣)

الحـل

ميل المستقيم = $\frac{٤ - ٣}{٣ - ٥}$ = $\frac{-١}{٢}$ ∴ معادلة المستقيم : ص = م س + جـ

∴ ص = -$\frac{١}{٢}$س + جـ ∵ (٣ ، ٤) تقع على المستقيم ∴ تحققه

∴ ٤ = -$\frac{١}{٢}$ × ٣ + جـ ∴ جـ = $\frac{١١}{٢}$

∴ معادلة المستقيم : ص = -$\frac{١}{٢}$س + $\frac{١١}{٢}$

تمرين (٢) : على معادلة الخط المستقيم

❶ أوجد ميل الخط المستقيم المار بكل زوج :

[أ] (٣ ، ٢) ، (-٢ ، ٥) [ب] (٤ ، ٠) ، (٢ ، -١)

[جـ] (٧ ، -١) ، (٣ ، -٣) [د] (-٥ ، -٣) ، (-١ ، ٣)

...... أوجد قيمة أ إذا كان المستقيم ص = أس + ٥ يوازى المستقيم ص = ٢س − ٣

٢ أوجد قيمة أ إذا كان المستقيم : ص = أس − ٣ يوازى المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٢) ، (٢ ، ٤)

٣ أوجد قيمة أ إذا كان المستقيم

٤ أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محور الصادات جزءاً موجباً مقداره ٧ وحدات وميله = ٤

٥ أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محور الصادات جزءاً سالباً مقداره ٣ وحدات ويصنع مع محور السينات الموجب زاوية قياسها ٤٥°

٦ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٦) ، وميله = ٤

٧ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (−٣ ، ٥) ، (٥ ، −٣)

٨ أوجد ميل المستقيمات التالية بطريقتين :

[أ] ٢س − ٣ص + ٨ = ٠ [ب] ٥ص + ٤س − ٢ = ٠

[جـ] ص = ٨س [د] ص = ٥ [هـ] س = ٦

٩ إذا كان المستقيم : أس − ٤ص + ٥ = ٠ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية ظلها ٠,٧٥ ، أوجد قيمة أ

درس ٣ معادلة الخط المستقيم المتجهة

• مقدمة :

مما سبق عرفنا أن معادلة الخط المستقيم تتكون بمعرفة نقطة وميل أو نقطتين على المستقيم ، وهذا يرجع إلى المسلمات التالية :

(١) إذا كان أ ، ب نقطتين مختلفتين فى المستوى فإنه يوجد خط مستقيم وحيد مار بهما .

(٢) إذا كان ل خطاً مستقيماً ، هـ نقطة فى المستوى لا تنتمى إلى (ل) فإنه يوجد خط وحيد يمر بالنقطة ويوازى الخط المستقيم (ل) .

تعريف متجه اتجاه مستقيم : هو كل متجه غير صفرى يمكن تمثيله بقطعة مستقيمة موجهة على الخط المستقيم أو يوازيه .

فمثلاً : إذا كان لدينا المستقيم ... أ ، ب ، جـ

حيث أ = (−٢ ، ٣) ، ب = (٠ ، ٢) ، جـ = (٢ ، ١)

ل
(−٢ ، ٣) أ
(٠ ، ٢) ب
(٢ ، ١) جـ

لاحظ أن :

$\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}$
= (٠ ، ٢) − (−٢ ، ٣) = (٢ ، −١)

$\overrightarrow{\text{أجـ}} = \overrightarrow{\text{جـ}} - \overrightarrow{\text{أ}}$ = (٢ ، ١) − (−٢ ، ٣) = (٤ ، −٢)

$\overrightarrow{\text{بجـ}} = \overrightarrow{\text{جـ}} - \overrightarrow{\text{ب}}$ = (٢ ، ١) − (٠ ، ٢) = (٢ ، −١)

لاحظ أن : $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـأ}}$ متجهات اتجاه للخط المستقيم لكن النتائج ترجع إلى القاعدة التالية :

> إذا كان $\overrightarrow{\text{ى}}$ = (أ ، ب) متجه اتجاه للمستقيم فإن ك $\overrightarrow{\text{ى}}$ متجه اتجاه لنفس المستقيم
> حيث ك = ٠ .

فمثلاً : إذا كان متجه اتجاه مستقيم = (٢ ، −٣) فإن كل النقط التالية متجه اتجاه لنفس هذا المستقيم (−٢ ، ٣) ، (٦ ، −٩) ، (٤ ، −٦) . . . . .

• الصيغة المتجهة لمعادلة الخط المستقيم :

المار بالنقطة هـ والمتجه $\overrightarrow{\text{ى}}$ متجه اتجاه للمستقيم : $\overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{هـ}} + \text{ك}\,\overrightarrow{\text{ى}}$

• مثال (١) : اكتب المعادلة المتجهة للخط المستقيم المار بالنقطة (٥ ، −١) ومتجه اتجاه له (٢ ، ٣)

الحل

∵ $\overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{هـ}} + \text{ك}\,\overrightarrow{\text{ى}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٥ ، −١) + ك(٢ ، ٣)

ثانيا : المعادلات الوسيطية البارامترية :

∵ $\overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{هـ}} + \text{ك}\,\overrightarrow{\text{ى}}$

∵ $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (س ، ص) ، $\overrightarrow{\text{هـ}}$ = (س_1 ، ص_1) ، $\overrightarrow{\text{ى}}$ = (أ ، ب)

∴ (س ، ص) = (س_1 ، ص_1) + ك(أ ، ب) بالمقارنة

$\text{س} = \text{س}_1 + \text{ك أ}$ ، $\text{ص} = \text{ص}_1 + \text{ك ب}$

يسميان المعادلتان الوسيطيتان للخط المستقيم .

..... المعادلتان الوسيطيتان بحذف (ك) منهما

ثالثًا : المعادلة الكارتيزية : من المعادلتان الوسيطيتان بحذف (ك) منهما

$\because \frac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{أ}} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{ب}}$

$\therefore \frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ وبوضع م $= \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ حيث م ميل المستقيم .

$\therefore \frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1} =$ م هى بداية الصورة الكارتيزية .

ومنها نصل إلى الصورة العامة ويطلق أحيانًا على (الصورة العامة) الصورة الكارتيزية .

• **استنتاج هام :** إذا كان $\overrightarrow{\text{ى}}$ = (أ ، ب) متجه اتجاه المستقيم .

فإن : $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ = م = ميل المستقيم .

• **مثال (٢) :** أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (−٢ ، ٢) والمتجهة $\overrightarrow{\text{ى}}$ = (٤ ، ١) متجه اتجاه للمستقيم

الحـل

المعادلة المتجهة : $\overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{و}} + \text{ك}\,\overrightarrow{\text{ى}}$ $\therefore \overrightarrow{\text{ر}}$ = (−٢ ، ٢) + ك(٤ ، ١)

∴ س = −٢ + ٤ك ، ص = ٢ + ك المعادلتان الوسيطيتان .

بحذف ك منهما ∴ $\frac{\text{س} + ٢}{٤} = \frac{\text{ص} - ٢}{١}$

∴ $\frac{\text{ص} - ٢}{\text{س} + ٢} = \frac{١}{٤}$ بداية المعادلة الكارتيزية ∴ ٤ص − ٨ = س + ٢

∴ ٤ص − س − ١٠ = ٠ تسمى الصورة العامة وأحيانًا الكارتيزية .

مثال (٣) : أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين :

و = (٢ ، ٣) ، هـ = (٤ ، −١)

الحـل

متجه اتجاه المستقيم $\overrightarrow{\text{وهـ}} = \overrightarrow{\text{هـ}} - \overrightarrow{\text{و}}$ = (٤ ، −١) − (٢ ، ٣) = (٢ ، −٤)

∴ $\overrightarrow{\text{ى}}$ = (٢ ، −٤)

$\overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{و}} + \text{ك}\,\overrightarrow{\text{ى}}$ أ، $\overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{هـ}} + \text{ك}\,\overrightarrow{\text{ى}}$

$\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٢ ، ٣) + ك(٢ ، −٤) المعادلة المتجهة

ملحوظة : يمكن إيجاد
$\overrightarrow{\text{هـو}}$ = (−٢ ، ٤)
وهى أيضًا متجه اتجاه

∴ س = ٢ + ٢ك ، ص = ٣ − ٤ك المعادلتان الوسيطيتان

∴ $\frac{\text{س} - ٢}{٢} = \frac{\text{ص} - ٣}{-٤}$ ∴ ٢ص − ٦ = −٤س + ٨ ∴ ٢ص + ٤س − ١٤ = ٠

∴ ص + ٢س − ٧ = ٠ الصورة الكارتيزية أو الصورة العامة .

١. أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، −٣) ومتجه اتجاه له (٢ ، −١)

٢. أوجد المعادلة الكارتيزية الذى يمر بالنقطة (٣ ، −٤) ويصنع زاوية ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

٣. أوجد الصور المختلفة لمعادلة كل من المستقيمات التى تمر بالنقطتين :

[أ] (٣ ، ١) ، (٦ ، ٤) [ب] (أ ، ٠) ، (٠ ، ب)

[جـ] (٢ ، ٣) ، (٥ ، ٣) [د] (١ ، ١) ، (١ ، −٢)

٤. أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) والمتجه $\overrightarrow{\text{أب}}$ متجه اتجاه حيث أ = (١ ، ٣) ، ب = (٢ ، ٤) فى الصورة العامة .

٥. أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (−١ ، ٣) والمتجه $\overrightarrow{\text{أب}}$ متجه اتجاه حيث أ = (٣ ، ١) ، ب = (٥ ، ١) فى الصورة العامة .

٦. أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة (٥ ، ٦) ويوازى محور السينات.

٧. أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بنقطة الأصل والنقطة (٤ ، ٢)

٨. أوجد المعادلة المتجهة للخط المستقيم الذى ميله $\frac{١}{٢}$ ويمر بالنقطة (٢ ، −١)

٩. أوجد المعادلة الكارتيزية للمستقيم المار بالنقطة (٣ ، −٥) ويوازى المستقيم س + ٢ص − ٧ = ٠

١٠. أوجد معادلة المستقيم فى الصورة العامة المار بالنقطة (٢ ، −٣) وميله م = ٢ وإذا كان هذا المستقيم يمر بالنقطتين (أ ، ٧) ، (٥ ، ب) أوجد قيمة أ ، ب

١١. أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة و = (١ ، −١) والموازى للخط المستقيم : س = ٣ − ٢ك ، ص = −١ + ٣ك

١٢. أوجد المعادلات المتجهة والكارتيزية للخط المستقيم المار بالنقطة (س_1 ، ص_1) ومتجه الاتجاه له $\overrightarrow{\text{ى}}$ (أ ، ب) إذا كان المستقيم : أولاً : يوازى محور الصادات. ثانيًا : يوازى محور السينات . ثالثًا : يمر بنقطة الأصل .

درس ٤ : متجه اتجاه العمودى للمستقيم ومعادلة المستقيم بمعلومية الجزءين المقطوعين من محورى الإحداثيات

• **مفهوم :** إذا كان ى⃗ = (أ ، ب) متجه اتجاه مستقيم

فإن متجه اتجاه العمودى على المتجه ى⃗ ليس وحيداً بل عدد كبير لا نهائى .

وهى العائلة التى على صورة ك(ب ، −أ)

فمثلاً : إذا كان ى⃗ = (٣ ، ٨) متجه اتجاه المستقيم

فإن متجه اتجاه العمودى هو (٨ ، −٣) أ، (−٨ ، ٣) أ، (١٦ ، −٦) ، . . . .

• **مثال (١) :** إذا كان المستقيم الذى يمر بالنقطة (٣ ، ٤) ومتجه اتجاه العمودى عليه (٣ ، −١) ، أوجد الصورة المختلفة لمعادلة المستقيم .

الحـل

متجه اتجاه المستقيم هو (١ ، ٣) تبديل أماكن (٣ ، −١) مع تغيير إشارة إحداهما

∴ ر⃗ = (٣ ، ٤) + ك(١ ، ٣) المعادلة المتجهة

، س = ٣ + ك ، ص = ٤ + ٣ك المعادلتان الوسيطيتان

أو المعادلتان البارامتريتان

، (س − ٣) / ١ = (ص − ٤) / ٣ ∴ ٣س − ٩ = ص − ٤

∴ **٣س − ص − ٥ = ٠**

المعادلة الكارتيزية للمستقيم :

المعادلة التى تقطع جزءين من المحورين صورتها : س / أ + ص / ب = ١

حيث أ ، ب الجزءان المقطوعان من محور السينات والصادات على الترتيب .

• **مثال (٢) :** أوجد طولى الجزأين المقطوعين من المحورين للمستقيم :

٥س − ٣ص = ١٥

الحـل

بالقسمة على ١٥ ∴ س / ٣ + ص / −٥ = ١

∴ طولا الجزأين المقطوعين من المحورين السينى والصادى على الترتيب ٣ ، −٥

تمرين (٤) : على متجه اتجاه العمودى للمستقيم ومعادلة المستقيم بمعلومية الجزءين المقطوعين من محورى الإحداثيات

١. أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، −٣) عمودياً على المتجه (−١ ، ٢)

٢. أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، −١) وعمودياً على المستقيم : س + ص − ٨ = ٠

٣. أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة (٥ ، ٧) وعمودى على المستقيم : ر⃗ = (٣ ، ٠) + ك(٤ ، ٣)

٤. أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٠ ، ٠) وعمودياً على المستقيم : ر⃗ = (٠ ، ٣) + ك(٧ ، −٢)

٥. أوجد المعادلة الكارتيزية للمستقيم الذى يقطع من المحورين السينى والصادى جزأين موجبين مقدارهما ٢ ، ٣ على الترتيب .

٦. أوجد المعادلة العامة للمستقيم الذى يقطع من محورى الإحداثيات النقطتين : (٣ ، ٠) ، (٠ ، −٤)

٧. أوجد طولى الجزءين المقطوعين من محورى الإحداثيات للمستقيمات :

[أ] ٢س − ٥ص − ٩ = ٠ [ب] ٢س − ٥ص − ٨ = ٠

[جـ] ٢س = ص [د] ص = ٣

[هـ] س = ٢

٨. أوجد معادلة المستقيم فى الصورة العامة إذا كان يقطع من الجزء الموجب لمحور السينات جزء طوله ٤ وحدات ، ومن محور الصادات السالب جزءاً طوله ٥ وحدات .

درس ٥ قياس الزاوية الحادة بين مستقيمين

إذا كانت هـ قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين ل، ، ل، اللذين ميلاهما $م_1$ ، $م_2$

$$طا هـ = \left| \frac{م_1 - م_2}{1 + م_1 م_2} \right|$$ حيث $م_1 \times م_2 \neq -1$

• مثال (١) : أوجد قياس الزاوية الحادة بين :

$\vec{ر}$ = (٠، ٢) + ك(٣، -١) ، $\vec{ر}$ = (٠، ٥) + ك(١، ٢)

الحـل

متجه اتجاه المستقيم الأول = (٣، -١) ∴ $م_1 = \frac{-1}{3}$ = ميل المستقيم الأول

متجه اتجاه المستقيم الثانى = (١، ٢) ∴ $م_2 = \frac{2}{1}$ = ميل المستقيم الثانى

∴ $طا هـ = \left| \frac{-\frac{1}{3} - 2}{1 + \frac{-1}{3} \times 2} \right| = 7$ ∴ ق(هـ) = ٨١° ٥٢َ ١١ً

• مثال (١) : أوجد قياس الزاوية المحصورة بين المستقيم : س − ٢ص + ٣ = ٠

والمستقيم المار بالنقطتين (٤، -١) ، (٢، ١)

الحـل

$م_1 = \frac{-معامل\ س}{معامل\ ص} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

∵ ميل المستقيم الثانى = $\frac{1+1}{2-4} = \frac{2}{-2} = -1$

∴ $طا هـ = \left| \frac{\frac{1}{2} + 1}{1 + \frac{1}{2} \times -1} \right| = 3$ ∴ ق(هـ) = ٧١° ٣٣َ ٥٤ً

• ملحوظة هامة : عند استخدام قانون الزاوية بين مستقيمين فى إيجاد قياس زاوية داخلة لمثلث يجب تحديد نوع الزاوية (حادة - منفرجة - قائمة) .

تمرين (٥) : على قياس الزاوية الحادة بين مستقيمين

❶ أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

$\vec{ر}_1$ = (٣، ٥) + ك(-٢، ١) ، $\vec{ر}_2$ = (-٣، ٨) + ك(٦، ٣)

❷ أوجد قياس الزاوية ...

٤س + ٥ص − ١٢ = ٠ ، ٢س − ٣ص + ٨ = ٠

❸ أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم : س − ٢ص + ١ = ٠

والمستقيم الذى ميله = $-\frac{1}{3}$

❹ أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

٣س + ٤ص − ٣٢ = ٠ ، س − ٤ص − ٥ = ٠

❺ س + ٢ص − ٣ = ٠ ، $\frac{ص + 3}{س + 2} = \frac{2}{3}$

❻ س + ص + ٥ = ٠ ، محور السينات

❼ ص = ٣س ، ص = −٣س

❽ أ ب جـ فيه أ(٠، ٢) ، ب = (٣، ١) ، جـ = (−٢، −١) أوجد قياس (أ).

❾ أوجد قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيم المار بالنقطتين : (٠، ١) ، (−١، ٠) والاتجاه الموجب لمحور السينات .

❿ أوجد قياس الزاوية الحادة بين $\vec{ر}$ = (٥، ٨) + ك(٣، ٣)

والمستقيم : ٢س − ص − ٣ = ٠

⓫ إذا كان قياس الزاوية الحادة بين المستقيم : س + كص − ٩ = ٠

٣س − ٥ص + ٨ = ٠ يساوى $\frac{\pi}{4}$ ، أوجد قيمة (ك)

⓬ أوجد قيمة (ك) إذا كان قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

س + كص − ٨ = ٠ والمستقيم ر = (٣، ٠) + ك(١، ٢) تساوى $\frac{\pi}{4}$

⓭ إذا كان المثلث أ ب جـ قائم الزاوية فى ب حيث أ = (٢، ٣) ، ب = (٥، ٧)،

جـ = (١ ، ص) أوجد قيمة ص ثم أوجد قياس كل من الزاويتين الأخريين .

درس ٦ | طول العمود المرسوم على خط مستقيم من نقطة

إذا كان (س، ، ص،) لا تنتمي إلى المستقيم أ س + ب ص + جـ = ٠

فإن طول العمود (ل) = $\frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$

• مثال (١) : أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢ ، -٥) إلى المستقيم :

$\overrightarrow{ر}$ = (-١ ، ٠) + ك(١٢ ، ٥) المتجهة

الحل

∵ (س ، ص) = (-١ ، ٠) + ك(١٢ ، ٥)

∴ س = -١ + ١٢ك ، ص = ٥ك الوسيطيتان

∴ $\frac{ص}{٥} = \frac{س + ١}{١٢}$ ∴ ٥س + ٥ = ١٢ص

∴ المعادلة في الصورة العامة : ٥س - ١٢ص + ٥ = ٠ الكارتيزية

∴ طول العمود = $\frac{|٥ × ٢ - ١٢ × -٥ + ٥|}{\sqrt{٢٥ + ١٤٤}} = \frac{٧٥}{١٣}$ وحدة طول

• مثال (١) : أثبت أن المستقيم : ٣س - ٤ص - ٧ = ٠ ، ٣س - ٤ص + ١١ = ٠

متوازيان وأوجد البعد بينهما .

الحل

∵ $م_١ = \frac{-٣}{-٤} = \frac{٣}{٤}$ ، $م_٢ = \frac{٣}{٤}$ ∴ $م_١ = م_٢$ ∴ المستقيمان متوازيان .

بفرض أن نقطة تقع على المستقيم الأول ولتكن : س = ٠ ، ∴ ص = $\frac{-٧}{٤}$

∴ النقطة (٠ ، $\frac{-٧}{٤}$) تقع على المستقيم الأول بعدها عن المستقيم الثانى

الطول = $\frac{|٣ × ٠ - ٤ × -\frac{٧}{٤} + ١١|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{١٨}{٥}$ وحدة طول

تمرين (٦) : على طول العمود المرسوم على خط مستقيم من نقطة

أوجد طول الأعمدة من النقط المبينة إلى المستقيمات المقابلة من (١) إلى (٧)

❶ من النقطة (-٣ ، ٢) إلى المستقيم : ٣س - ٤ص + ٢ = ٠ .

❷ من النقطة (١ ، -٢) والمستقيم : ٤س - ٣ص = ٠

❸ من النقطة (١ ، ١) والمستقيم : ٥س + ١٢ص - ٦ = ٠ .

❹ النقطة (٢ ، ٤) إلى المستقيم س = ٣

❺ النقطة (٣ ، -٤) إلى المستقيم ص = ٣

❻ من (٤ ، -٥) إلى الخط المستقيم : $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٢) + ك(٤ ، ٣)

❼ من (٢ ، ٠) إلى الخط المستقيم : $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، ٥) + ك(٥ ، ١٢)

❽ أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٥ ، ٢) إلى الخط المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، -٣) ، (٤ ، ٠)

❾ أوجد طول العمود من النقطة (٠ ، ٠) من الخط المستقيم المار بالنقطة (-٣ ، ٣) وميله $-\frac{٣}{٤}$

❿ أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٤ ، -٢) على المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ١) وميله $\frac{٥}{١٢}$

⓫ أوجد طول العمود المرسوم من النقطة أ على الضلع $\overline{بجـ}$ من أضلاع المثلث أ ب جـ حيث أ = (٤ ، ٦) ، ب = (٢ ، ٣) ، جـ = (-٢ ، ٦)

⓬ أثبت أن المستقيمين : ٥س + ١٢ص - ٩ = ٠ ، ١٠س + ٢٤ص + ٩ = ٠
متوازيان وأوجد البعد بينهما .

⓭ أثبت أن المستقيمين : ٣س + ٤ص - ٥ = ٠ ، ٦س + ٨ص + ١٠ = ٠
متوازيان وأوجد البعد بينهما .

⓮ إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ء) على الخط المستقيم :
٢س + ص + ٤ = ٠ يساوى $٢\sqrt{٥}$ وحدة طول أوجد (ء)

⓯ أ ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overleftrightarrow{أء}$ // $\overleftrightarrow{بجـ}$ فإذا كانت أ(٢ ، ١) ، ب(٥ ، ٣) ، جـ(٦ ، ١) ، ء(٤ ، ص) أوجد قيمة ص ثم أوجد مساحة شبه المنحرف أ ب جـ ء

درس (٧) المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين

إذا كان لدينا مستقيمين : ل١ : أ١ س + ب١ ص + جـ١ = ٠

، ل٢ : أ٢ س + ب٢ ص + جـ٢ = ٠

فإن المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين هى :

(أ١ س + ب١ ص + جـ١) + ك (أ٢ س + ب٢ ص + جـ٢) = ٠ حيث ك ∈ ح*

مع استخدام الشرط الموجود فى المسألة فى إيجاد قيمة (ك)

مثال (١): أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة أ(٢ ، -١) وبنقطة تقاطع المستقيمين :

٧س + ص + ٣ = ٠ ، ٥س - ص - ٣ = ٠

الحل

الطريقة الأولى تعتمد على إيجاد نقطة تقاطع المستقيمين

حيث : ٧س + ص = -٣

٥س - ص = ٣

بالجمع

١٢س = ٠ ∴ س = ٠ ∴ ص = -٣

∴ نقطة تقاطع المستقيمين (٠ ، -٣)

∴ معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، -٣) ، (٢ ، -١)

نوجد الميل أولاً : م = (-٣ + ١) ÷ (٠ - ٢) = -٢ ÷ -٢ = ١

∴ المعادلة الكارتيزية : (ص - -١) ÷ (س - ٢) = ١ ∴ ص + ١ = س - ٢

∴ **س - ص - ٣ = ٠**

الطريقة الثانية : إيجاد قيمة (ك) حيث المعادلة هى :

٧س + ص + ٣ + ك(٥س - ص - ٣) = ٠ .... (١)

∵ (٢ ، -١) يمر بالمستقيم ∴ يحققه

∴ ١٤ - ١ + ٣ + ك(٥ × ٢ + ١ - ٣) = ٠ ∴ ٨ك = -١٦ ∴ ك = -٢

∴ ٧س + ص + ٣ - ٢(٥س - ص - ٣) = ٠

∴ ٣ص - ٣س + ٩ = ٠

بالقسمة على (-٣)

∴ **س - ص - ٣ = ٠**

تمرين (٧) : على المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين

١. أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٤ ، ٢) وبنقطة تقاطع المستقيمين :
س - ٤ص + ٥ = ٠ ، ٧ص + س - ١٧ = ٠

٢. أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ١) وبنقطة تقاطع المستقيمين :
٣س - ٢ص + ٢٥ = ٠ ، ٢ص + ٥س - ٢٣ = ٠

٣. أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع المستقيمين :
٣س + ٢ص - ٧ = ٠ ، ر⃗ = (-٢ ، ٠) + ك(٣ ، ٢) وبالنقطة (٣ ، ٤)

٤. أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :
ر⃗ = ك(-٢ ، ٢) ، ٣س - ٢ص = ١٣ ويوازى محور الصادات .

٥. أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :
٢ص - س - ٢ = ٠ ، ٤ص + ٣س - ٢٤ = ٠ وعمودى على المستقيم الثانى

٦. أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٣ص - ٢س + ١٥ = ٠ ،
٢ص + ٣س - ١٦ = ٠ ويوازى المستقيم : ص - ٣س + ١ = ٠ .

٧. أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٢ص - س + ٢ = ٠ ،
٢ص + س + ١٠ = ٠ وعمودى على المستقيم : ٤س + ٣ص - ٨ = ٠ .

٨. أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :
ص - س - ٢ = ٠ ، ٢ص - ٣س - ٣ = ٠ وميله = ٢ ÷ ٣

٩. أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :
٣ص - س - ١ = ٠ ، ص - ٢س + ١ = ٠ والموازى لمحور السينات .

١٠. أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٢س - ٣ص + ١٣ = ٠ ،
٢ص + س - ٦ = ٠ ويقطع جزأين متساويين من المحورين .

١١. أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :
٢س + ٣ص - ٢ = ٠ ، ٣س - ص - ١٤ = ٠
والذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور الصادات زاوية قياسها ١٣٥°

المرشد

فى المراجعة العامة والنهائية فى الرياضيات

إرشادات تمارين الجبر وحساب المثلثات والهندسة التحليلية



للصف الأول الثانوى

إعداد

سعيد جودة

أولا : حلول الجبر

إرشادات تمارين (١) على مفهوم المصفوفة

(١) س = ٣ ، ع − ١ = ٥ ∴ ع = ٦
ص + ١ = ٨ ∴ ص = ٧
∴ ك = ٤

(٢) ٢س + ١ = ٥ ∴ ٢س = ٤ ∴ س = ٢
٢ص = ٣ ∴ ص = ٣/٢
∴ ٤ل + ١ = ٣ ∴ ٤ل = ٢
∴ ل = ١/٢

(٣) ل/٢ = ٨ ∴ ل = ١٦
ع/٣ = ٣ ∴ ع = ٩
∴ ب = ٦ ∴ أ + ب = ٨
∴ أ + ٦ = ٨ ∴ أ = ٢

(٤) س = ٤ ، ص = ٢
أ + ب = −٤
أ − ب = ٨
بالجمع ٢أ = ٤ ∴ أ = ٢
∴ ب = −٦

(٥) أ = ٣ ، ب = ٤
س + ص = ٦
س − ص = ٤
بالجمع ٢س = ١٠ ∴ س = ٥
∴ ص = ١

(٦) س = ٢ ، س + ص = ٤ ∴ ص = ٢
أ + ٢ب = ١٠
أ − ب = ٥
بالطرح ٣ب = ٥ ∴ ب = ٥/٣
∴ أ = ٥ + ٥/٣ = ٢٠/٣

(٧) جـ = ٨ ، د = ٢أ
٢ب = جـ ، ٤أ = ب
∴ ٢ب = ٨ ∴ ب = ٤
∴ ٤أ = ب ∴ أ = ٤/٤ = ١
∴ د = ٢

(٨) ب = ٢ ، ٣جـ = ٦ ∴ جـ = ٢
∵ أ + ب = ٤ب
∴ أ + ٢ = ٨ ∴ أ = ٦
ب − أ = ٢أ + د
٢ − ٦ = ١٢ + د ∴ د = −١٦

(٩) ٢أ + ١ = ٣ ∴ ٢أ = ٢
أ = ١ ∵ ٣ب + أ = −١٤
٣ب = −١٤ − ١ ∴ ب = −١٥/٣ = −٥
∵ ٢ب + جـ = ٠ ∴ جـ = −٢ب
∴ جـ = −٢ × −٥ = ١٠
∴ ٢جـ + د = ١٨
٢ × ١٠ + د = ١٨ ∴ د = ١٨ − ٢٠
∴ د = −٢

(١٠) ٥أ = ٤٥ ∴ أ = ٩ ، أ + ٢ب = ٤٩
٢ب = ٤٩ − ٩ = ٤٠
∴ ب = ٢٠
٢جـ = ٦ ∴ جـ = ٣
د + ٥جـ = ٢٠ ⇐ د + ١٥ = ٢٠
∴ د = ٥

(١١) أ^مد = $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٤ \\ ٥ \end{pmatrix}$

(١٢) ب^مد = $\begin{pmatrix} ٨ & ٢ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix}$

(١٣) جـ^مد = $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٦ & ٨ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}$

(١٤) $٦ = \begin{pmatrix} ١ & ٥ & ٢ \\ ٢ & ٨ & ٣ \\ ١٠ & ٩ & ١ \end{pmatrix}$

(١٥) $٦ = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix} = I$

(١٦) $\text{ب}^{t} = \begin{pmatrix} ٦ & ٥ & \text{س} \\ ٩ & ١ & ٥ \\ ٤ & ٩ & ٦ \end{pmatrix} = \text{ب}$

(١٧) $\text{س}^{t} = \begin{pmatrix} -١ & -٥ & ٣ \\ ٩ & ٦ & ٥ \\ ٧ & -٩ & ١ \end{pmatrix}$

(١٨) $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٦ \\ ٢ & ٤ & ٥ \end{pmatrix}$

(١٩) $\text{س} = \begin{pmatrix} ٩ & ٣ & ٦ \\ ٠ & ٤ & ٥ \\ ٨ & ١ & ٢ \end{pmatrix}$

(٢٠) $\text{ص} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٦ \end{pmatrix}$ (٢١) $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٤ \end{pmatrix}$

(٢٢) $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ١ \\ ٦ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

(٢٣) $\text{س} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ٥ & ٢ \\ ٤ & ٦ & ٥ \end{pmatrix}$

(٢٤) $\text{س}^{t} = \begin{pmatrix} ٤ & -١ & ١ \\ ٦ & ٢ & -١ \\ ٥ & ٦ & ٤ \end{pmatrix}$

∵ س = س^{t} ∴ هي متماثلة

إرشادات تمارين (٢)
على جمع وطرح المصفوفات

(١) أولاً: أ + ٣ب $= \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٦ & ٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٩ & ٣ \\ -٦ & -٣ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ١٢ & ٥ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$

ثانياً: ٢أ + (−٥ب)

$= \begin{pmatrix} ٦ & ٤ \\ ١٢ & ١٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -١٥ & -٥ \\ ١٠ & ٥ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -٩ & -١ \\ ٢٢ & ١٥ \end{pmatrix}$

ثالثاً: ب + ٢جـ + (−أ)

$= \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ -٢ & -١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٨ & ١٢ \\ ٤ & ١٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٣ & -٢ \\ -٦ & -٥ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٨ & ١١ \\ -٤ & ٤ \end{pmatrix}$

رابعاً: أ + (−٢ب) + (−٣جـ)

$= \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٦ & ٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٦ & -٢ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -١٢ & -١٨ \\ -٦ & -١٥ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -١٥ & -١٨ \\ ٤ & -٨ \end{pmatrix}$

(٢) أولاً: ٣س − ٣ب = ٢أ

∴ ٣س = ٢أ + ٣ب

$٣\text{س} = \begin{pmatrix} ١٤ & ٨ & ٢ \\ ١٦ & ١٠ & ٤ \\ ١٨ & ١٢ & ٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٣ & ٦ & ١٥ \\ -٦ & ٩ & ١٨ \\ ٢١ & ١٢ & ٣ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ١١ & ١٤ & ١٧ \\ ١٠ & ١٩ & ٢٢ \\ ٣٩ & ٢٤ & ٩ \end{pmatrix}$

$\text{س} = \begin{pmatrix} \frac{١١}{٣} & \frac{١٤}{٣} & \frac{١٧}{٣} \\ \frac{١٠}{٣} & \frac{١٩}{٣} & \frac{٢٢}{٣} \\ ١٣ & ٨ & ٣ \end{pmatrix}$

ثانياً: ٣س^{t} = أ − ٢ب

$= \begin{pmatrix} ٧ & ٤ & ١ \\ ٨ & ٥ & ٢ \\ ٩ & ٦ & ٣ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & -٤ & -١٠ \\ ٤ & -٦ & -١٢ \\ -١٤ & -٨ & -٢ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٩ & ٠ & -٩ \\ ١٢ & -١ & -١٠ \\ -٥ & -٢ & ١ \end{pmatrix}$

∴ $\text{س}^{t} = \begin{pmatrix} ٣ & ٠ & -٣ \\ ٤ & \frac{-١}{٣} & \frac{-١٠}{٣} \\ \frac{-٥}{٣} & \frac{-٢}{٣} & \frac{١}{٣} \end{pmatrix}$

$\text{س} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٣} & \frac{-١٠}{٣} & -٣ \\ \frac{-٢}{٣} & \frac{-١}{٣} & ٠ \\ \frac{-٥}{٣} & ٤ & ٣ \end{pmatrix}$

ثالثاً: س + ٢أ^{t} = ٢ب^{t}

∴ س = ٢ب^{t} + $-٢(\text{أ}^{t})$

$\text{س} = ٢\begin{pmatrix} ١ & ٦ & ٥ \\ ٤ & ٣ & ٢ \\ ٧ & -٢ & -١ \end{pmatrix} + (-٢)\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ & ٤ \\ ٩ & ٨ & ٧ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٢ & ١٢ & ١٠ \\ ٨ & ٦ & ٤ \\ ١٤ & -٤ & -٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٦ & -٤ & -٢ \\ -١٢ & -١٠ & -٨ \\ -١٨ & -١٦ & -١٤ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -٤ & ٨ & ٨ \\ -٤ & -٤ & -٤ \\ -٤ & -٢٠ & -١٦ \end{pmatrix}$

(٣) (أ) $\begin{pmatrix} ٥ & \text{س}+١ \\ ١٠ & \text{ص}+٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ١٠ & ٣ \end{pmatrix}$

س + ١ = ٢ ∴ س = ١

ص + ٥ = ٣ ∴ ص = −٢

(ب) $\begin{pmatrix} \text{ص}+٣ & \text{س}+٢ \\ \text{ل}+٥ & \text{ع}+٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٣ & ٤ \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix}$

∴ س + ٢ = ٤ ∴ س = ٢

∴ ص + ٣ = −٣ ∴ ص = −٦

∴ ع + ٤ = ٠ ∴ ع = −٤

∴ ل + ٥ = ٥ ∴ ل = صفر

(جـ) $\begin{pmatrix} \text{س} & ٤+٢ \\ \text{ص}-٤ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ & ٦ \\ ٨ & ٣ \end{pmatrix}$

∴ س = ٩ ∴ ص = ١٢

(د) $\begin{pmatrix} -٥ & -٣ & \text{س}-٤ \\ -٦ & \text{ص}-٨ & -٧ \\ \text{ع}+١ & ٨ & ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٥ & -٣ & ١ \\ -٦ & ١ & -٧ \\ ٤ & ٨ & ٦ \end{pmatrix}$

∴ س − ٤ = ١ ∴ س = ٥

∴ ص − ٨ = ١ ∴ ص = ٩

∴ ع + ١ = ٤ ∴ ع = ٣

(٤) أولاً: س = ب + ج + (−أ)

$= \begin{pmatrix} ٤ & -٣ \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٢ & -٣ \\ -١ & -٥ \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$$

ثانياً: ٢س = ٢ب + (-ج) + (-٣)أ

$$= \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ -3 & -15 \end{pmatrix}$$

$$٢س = \begin{pmatrix} 2 & -17 \\ 2 & -15 \end{pmatrix}$$

$$س = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-17}{2} \\ 1 & \frac{-15}{2} \end{pmatrix}$$

ثالثاً: ٢ب - س = ٢س - ٢ج - ب

٤س = ٢ب + ٢ج + ب

٤س = ٣ب + ٢ج

$$= \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 15 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$٤س = \begin{pmatrix} 12 & -5 \\ 25 & 0 \end{pmatrix}$$

$$س = \begin{pmatrix} 3 & \frac{-5}{4} \\ \frac{25}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

رابعاً: ½أ + ½س = ٣س + ٢ب

½أ - ٢ب = ٢½س

٥/٢ س = ½أ + (-٢)ب

$$\frac{5}{2}س = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{5}{2}س = \begin{pmatrix} -7 & \frac{15}{2} \\ -\frac{19}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$∴ س = \begin{pmatrix} \frac{-14}{5} & 3 \\ \frac{-19}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

خامساً: ٢أ + س^مد = ٢ب - ٥ج

س^مد = ٢ب + (-٥)ج + (-٢)أ

$$= \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -2 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ -25 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$س^{مد} = \begin{pmatrix} 4 & -22 \\ -17 & -10 \end{pmatrix}$$

$$س = \begin{pmatrix} -10 & -22 \\ -17 & 4 \end{pmatrix}$$

سادساً: ٣س + ٣أ = ٢س + ب

س = ب + (-٣أ)

$$س = \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ -3 & -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$س = \begin{pmatrix} -2 & -12 \\ 2 & -15 \end{pmatrix}$$

سابعاً: ٢س + س^مد = أ + ٢ب - ٣ج

∴ ٢س + س^مد

$$= \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -15 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$٢س + س^{مد} = \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \quad .... (١)$$

بأخذ مدور الطرفين

$$٢س^{مد} + س = \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} \quad .... (٢)$$

بضرب (١) × -٢ وجمعها على (٢)

∴ -٤س - ٢س^مد + ٢س^مد + س

$$= \begin{pmatrix} -20 & +18 \\ +8 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$∴ -٣س = \begin{pmatrix} -15 & 9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$∴ س = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ \frac{-4}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

ثامناً: س^مد + ٢ق^مد = (٢ب + ج)^مد

س^مد = ٢ب^مد + ج^مد + (-٢)ق^مد

$$س^{مد} = ٢\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -10 & -6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$س^{مد} = \begin{pmatrix} -10 & -10 \\ 13 & 4 \end{pmatrix}$$

$$س = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 13 & -10 \end{pmatrix}$$

$$∴ بجمعهما ٢س = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$$

$$∴ س = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & 5 \\ \frac{15}{2} & 5 \end{pmatrix}$$

$$∴ ص = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} - س$$

$$∴ ص = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & 5 \\ \frac{15}{2} & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -3 \\ -\frac{5}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

---

(٦) بفرض أن: ٣س + ٢ص = أ .... (١)

٢س - ٣ص = ب .... (٢)

بضرب ٣ في العلاقة (١)

، ضرب ٢ في العلاقة (٢)

∴ ٩س + ٦ص = ٣أ

٤س - ٦ص = ٢ب

بالجمع ١٣س = ٣أ + ٢ب

$$∴ ١٣س = ٣\begin{pmatrix} 12 & 1 \\ -5 & 11 \\ -12 & 5 \end{pmatrix} + ٢\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 14 & 3 \\ 5 & -14 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 36 & 3 \\ -15 & 33 \\ -36 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 28 & 6 \\ 10 & -28 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 26 & 13 \\ 13 & 39 \\ -26 & -13 \end{pmatrix}$$

$$∴ س = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

∴ من العلاقة (١): ٢ص = أ - ٣س

٢ص = أ + (-٣)س

$$٢ص = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ -5 & 11 \\ -12 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -9 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$٢ص = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -8 & 2 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} ،\ ص = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

(٧) بضرب العلاقة الثانية × ٢

$$=\begin{pmatrix} -٦+٠ & -٤-٤ \\ ٩+٠ & ٦+١ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -٩ & -٨ \\ ٩ & ٧ \end{pmatrix}$$

(٢) أ ب =

$$\begin{pmatrix} ٣ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ & ٠ \\ ١ & ٢ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٤ & ٥ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \\ ٨ & ٣ & ٢ \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} ٢٤+٨ & ٩+١٠ & ٦+٣ \\ ١٦ & ٦ & ٤+١ \\ ٨+٤ & ٣+٥ & ٢+٢ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ٣٢ & ١٩ & ٩ \\ ١٦ & ٦ & ٥ \\ ١٢ & ٨ & ٤ \end{pmatrix}$$

ب أ =

$$\begin{pmatrix} ٤ & ٥ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \\ ٨ & ٣ & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ & ٠ \\ ١ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} ٤+١٠ & ٨+٥ & ٤ \\ ٣ & ٣ & ٢ \\ ٨+٦+٦ & ١٦+٣+٦ & ٨+٤ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ١٤ & ١٣ & ٤ \\ ٣ & ٣ & ٢ \\ ٢٠ & ٢٥ & ١٢ \end{pmatrix}$$

(٣) أولاً: أ(ب + ج)

$$(\text{ب} + \text{ج}) = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$$

$$\text{أ}(\text{ب} + \text{ج}) = \begin{pmatrix} -١ & -٢ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -٢-٤ & -٤ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -٦ & -٤ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$$

[illegible]

إرشادات تمارين (٢)
على ضرب المصفوفات

[illegible]

∴ (س+٨ ٥+٢ص ٥ع) = (٣ ١٧ −٢٠)

∴ س + ٨ = ٣ ∴ س = −٥

٥ + ٢ص = ١٧ ∴ ٢ص = ١٢

∴ ص = ٦

٥ع = −٢٠ ∴ ع = −٤

(٥) أ ب =

$$\begin{pmatrix} س & ٤ \\ ص & -٨ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ -٤ & ٢ \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} ٢س-١٦ & ٤س+٨ \\ ٢ص+٣٢ & ٤ص-١٦ \end{pmatrix}$$

ب أ =

$$\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ -٤ & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} س & ٤ \\ ص & -٨ \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} ٢س+٤ص & -٢٤ \\ -٤س+٢ص & -٣٢ \end{pmatrix}$$

∵ أ ب = ب أ

∴ ٢س − ١٦ = ٢س + ٤ص .... (١)

∴ ص = −٤

٤س + ٨ = −٢٤ ∴ ٤س = −٣٢

∴ س = −٨

(٦) أ² =

$$\begin{pmatrix} ٦ & -٤ \\ ٩ & -٦ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٦ & -٤ \\ ٩ & -٦ \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} ٣٦-٣٦ & -٢٤+٢٤ \\ ٥٤-٥٤ & -٣٦+٣٦ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$$

= □ ∴ أ² = □

(أ ب) ج

أ ب =

$$\begin{pmatrix} -٢ & -١ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -٢-٢ & ٢-٣ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -٤ & -١ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$$

(أ ب) ج =

$$\begin{pmatrix} -٤ & -١ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -١ & ٣ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} ٤-٢ & -١٢+١ \\ -٢+٦ & ٦-٣ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ٢ & -١١ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$$

ثالثاً: ٦ ب~

$$٦=\begin{pmatrix} -٢ & ٠ \\ -١ & ١ \end{pmatrix} ، \text{ب}^{\sim}=\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$$

$$٦\,\text{ب}^{\sim}=\begin{pmatrix} -٢ & ٠ \\ -١ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -٢ & -٤ \\ -١-١ & -٢+٣ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -٢ & -٤ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$$

(٤) (أ)

$$\begin{pmatrix} س & ٢ \\ ص & ٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ \\ ٤ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ٢س+٨ \\ ٢ص+١٢ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ٢ \\ ٠ \end{pmatrix}$$

٢س + ٨ = ٢ ∴ ٢س = −٦

∴ س = −٣

∴ ٢ص + ١٢ = ٠ ∴ ص = −٦

(ب)

$$\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ٦ & ٨ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} س & ٤ \\ ٦ & ص \end{pmatrix}$$

∴ س = ٢ ، ص = ٨

(جـ) (س+٨ ٥+٢ص ع+٤ع)

(٧) $\text{أ}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1+1+1 & 1+1+1 & 1+1+1 \\ 1+1+1 & 1+1+1 & 1+1+1 \\ 1+1+1 & 1+1+1 & 1+1+1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$3\text{أ} = 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore \text{أ}^2 = 3\text{أ}$

---

(٨) $\text{أ}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{25}+\frac{4}{25} & \frac{2}{25}+\frac{8}{25} \\ \frac{2}{25}+\frac{8}{25} & \frac{4}{25}+\frac{16}{25} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{5}{25} & \frac{10}{25} \\ \frac{10}{25} & \frac{20}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \text{أ}$

---

(٩) $\text{م}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 9-2+1 & 6+2 & 3+3 \\ -3 & -2 & -1 \\ 3-2+3 & 2+6 & 1+9 \end{pmatrix}$

$\text{م}^2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 6 \\ -3 & -2 & -1 \\ 4 & 8 & 10 \end{pmatrix}$

$\text{م هـ} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6-2+1 & 6-2+2 & 3+2 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2-2+3 & 2-2+6 & 1-0+6 \end{pmatrix}$

$\text{م هـ} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 \\ -2 & -2 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

$\text{م}^2 - \text{م هـ} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

---

(١٠) $\text{أ ب} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 & -7 \\ 10 & -5 & 5 \\ -8 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2+20-8 & 5-10+5 & -7+10-3 \\ -2+50-48 & 5-25+30 & -7+25-18 \\ 2+30-32 & -5-15+20 & 7+15-12 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = 10\,I = \text{الأيسر}$

---

(١١) $\text{أ ب} = \frac{-1}{11}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$

$= \frac{-1}{11}\begin{pmatrix} 24-35 & -15+15 \\ 56-56 & -35+24 \end{pmatrix}$

$= \frac{-1}{11}\begin{pmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

---

(١٢) $\text{أ ب} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 9-25 & -3+15 \\ 12-35 & -4+21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 12 \\ -23 & 17 \end{pmatrix}$

$\therefore \text{س}^{\text{مد}} = \text{أ ب} + \text{أ}$

$= \begin{pmatrix} -16 & 12 \\ -23 & 17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

$\text{س}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} -13 & 17 \\ -19 & 24 \end{pmatrix}$

$\text{س} = \begin{pmatrix} -13 & -19 \\ 17 & 24 \end{pmatrix}$

---

(١٣) $\text{أ ب} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3+8+18 & 30 & 18+6 \\ 3+3 & 5 & 18+1 \\ 5+12+27 & 45 & 30+9 \end{pmatrix}$

$\text{أ ب} + 2\text{ب} = \begin{pmatrix} 29 & 30 & 24 \\ 6 & 5 & 19 \\ 44 & 45 & 39 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 12 \\ 4 & 0 & 0 \\ 6 & 10 & 2 \end{pmatrix}$

$\text{س}^{\text{مد}} + 2\text{س} = \text{أ ب} + 2\text{ب}$

$= \begin{pmatrix} 31 & 30 & 36 \\ 10 & 5 & 19 \\ 50 & 55 & 41 \end{pmatrix}$ ..... (١)

بأخذ مدور الطرفين

$\therefore \text{س} + 2\text{س}^{\text{مد}}$

$= \begin{pmatrix} 31 & 10 & 50 \\ 30 & 5 & 55 \\ 36 & 19 & 41 \end{pmatrix}$ ..... (٢)

بضرب العلاقة الأولى فى −٢ وجمعها على العلاقة (٢)

$\therefore -3\text{س} = \begin{pmatrix} -31 & -50 & -22 \\ 10 & -5 & 17 \\ -64 & -91 & -41 \end{pmatrix}$

$\therefore \text{س} = \begin{pmatrix} \frac{31}{3} & \frac{50}{3} & \frac{-22}{3} \\ \frac{-10}{3} & \frac{5}{3} & \frac{-17}{3} \\ \frac{-64}{3} & \frac{91}{3} & \frac{41}{3} \end{pmatrix}$

---

(١٤) أولاً: $3\text{س} - 5\text{س}^{\text{مد}} = \text{أ}^2 - 2\text{أ} + \text{ب}^{\text{مد}}$

$\because \text{أ}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4-5 & -2-3 \\ 10+15 & -5+9 \end{pmatrix}$

$\text{أ}^2 = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 25 & 4 \end{pmatrix}$ ، $-2\text{أ} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -10 & -6 \end{pmatrix}$

$\text{ب}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

$\because 3\text{س} - 5\text{س}^{\text{مد}} = \text{أ}^2 - 2\text{أ} + \text{ب}^{\text{مد}}$

$\therefore 3\text{س} - 5\text{س}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 19 & -5 \end{pmatrix}$ .... (١)

باخذ مدور الطرفين :

٣س^ت − ٥ص^ت

$٣س^ت − ٥ص^ت = \begin{pmatrix} ١٩ & ٦- \\ ٥- & ٣ \end{pmatrix}$ ... (٢)

بضرب العلاقة (١) × ٣

بضرب العلاقة (٢) × ٥ والجمع

٩س − ١٥ص^ت

$= \begin{pmatrix} ٩ & ١٨- \\ ١٥- & ٥٧ \end{pmatrix}$ ...... (١)

، ١٥س^ت − ٢٥ص

$= \begin{pmatrix} ٩٥ & ٣٠- \\ ٢٥- & ١٥ \end{pmatrix}$ ...... (٢)

بالجمع : $-١٩ص = \begin{pmatrix} ١٠٤ & ٤٨- \\ ٤٠- & ٧٢ \end{pmatrix}$

$∴ ص = \begin{pmatrix} \frac{١٠٤-}{١٩} & \frac{٤٨-}{١٩-} \\ \frac{٤٠-}{١٩-} & \frac{٧٢}{١٩-} \end{pmatrix}$

$∴ ص = \begin{pmatrix} \frac{١٣-}{٢} & ٣ \\ \frac{٥}{٢} & \frac{٩-}{٢} \end{pmatrix}$

ثانيًا: س^ت + ٥ص = اب − (ب ا)^ت

س^ت + ٥ص = اب − ا^ت ب^ت

$∴ اب = \begin{pmatrix} ٤ & ١- \\ ٣- & ٦ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١- & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٣+٨ & ٦-٣- \\ ٩-٢٠ & ١٨+٥- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١١ & ٨- \\ ١١ & ١٣ \end{pmatrix}$

$ا^ت ب^ت = \begin{pmatrix} ٩ & ١- \\ ٣- & ٤ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ١- \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٢٠+٢- & ١٥-١٢ \\ ١٢+١ & ٩-٦- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣- & ١٨ \\ ١٥- & ١٣ \end{pmatrix}$

∴ س^ت + ٥ص = اب + (−)٦ ب^ت

$= \begin{pmatrix} ١٤ & ٢٦- \\ ٢٦ & ٠ \end{pmatrix}$ ...... (١)

باخذ مدور الطرفين

∴ س + ٥ص^ت

$= \begin{pmatrix} ٠ & ٢٦- \\ ٢٦ & ١٤ \end{pmatrix}$ ...... (٢)

بضرب (١) × −٥ وجمعها على (٢)

∴ −٥س^ت − ٢٥ص + س + ٥ص^ت

$= \begin{pmatrix} ٠ & ٢٦- \\ ٢٦ & ١٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٧٠- & ١٣٠ \\ ١٣٠- & ٠ \end{pmatrix}$

$∴ -٢٤ص = \begin{pmatrix} ٧٠- & ١٠٤ \\ ١٠٤- & ١٤ \end{pmatrix}$

$∴ ص = \begin{pmatrix} \frac{٧٠}{٢٤} & \frac{١٠٤-}{٢٤} \\ \frac{١٠٤}{٢٤} & \frac{١٤-}{٢٤} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٣٥}{١٢} & \frac{١٣-}{٣} \\ \frac{١٣}{٣} & \frac{٧-}{١٢} \end{pmatrix}$

(١٥) $ا^٢ = \begin{pmatrix} ١- & ٢ \\ ٢ & ٤- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١- & ٢ \\ ٢ & ٤- \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٢-٢- & ٤+٤ \\ ٤+٤ & ٨-٨- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤- & ٨ \\ ٨ & ١٦- \end{pmatrix}$

$-٤ا = \begin{pmatrix} ٤ & ٨- \\ ٨- & ١٦ \end{pmatrix}$

$∴ ا^٢ + (-٤)ا = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} = □$

(١٦) $ا^٢ = \begin{pmatrix} ٣- & ٢ \\ ٢ & ١- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣- & ٢ \\ ٢ & ١- \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٧ & ٤- \\ ٤+٣ & ٣+٤ \\ & ٢-٢- \end{pmatrix}$

$٤ا = \begin{pmatrix} ١٢ & ٨- \\ ٨- & ٤ \end{pmatrix}$

∴ ا² + (−٤)ا + I

$= \begin{pmatrix} ١٢- & ٧ \\ ٧ & ٤- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١٢ & ٨- \\ ٨- & ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} = □$

(١٧) $ا^٢ = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ١- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ١- \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٤+٣ & ١-٩ \\ ١٦+١- & ٤-٣- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٨ \\ ١٥ & ٧- \end{pmatrix}$

$-٧ا = \begin{pmatrix} ٧- & ٢١- \\ ٢٨- & ٧ \end{pmatrix}$

$١٣I = \begin{pmatrix} ٠ & ١٣ \\ ١٣ & ٠ \end{pmatrix}$

$∴ ا^٢ + (-٧)ا + ١٣I = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} = □$

(١٨) $∴ ا^٢ = \begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٦- & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٦- & ١ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٣٠-١٠ & ٥+٤ \\ ٣٦+٥ & ٦-٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٠- & ٩ \\ ٤١ & ٤- \end{pmatrix}$

$٤ا = \begin{pmatrix} ٢٠+ & ٨+ \\ ٢٤- & ٤+ \end{pmatrix}$

$-١٧I = \begin{pmatrix} ٠ & ١٧- \\ ١٧- & ٠ \end{pmatrix}$

$∴ ا^٢ + ٤ا + (-١٧)I = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} = □$

(١٩) $ا^٢ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٠+٢ & ٦+١ \\ ٠+٦ & ٠+٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٧ \\ ٦ & ٣ \end{pmatrix}$

$-ا = \begin{pmatrix} ٢- & ١- \\ ٠ & ٣- \end{pmatrix}$

$-٦I = \begin{pmatrix} ٠ & ٦- \\ ٦- & ٠ \end{pmatrix}$

∴ ا² + (−ا) + (−٦) I

$= \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} = □$

إرشادات تمارين (٤) على المحددات

(١) ١٠ (٢) ٢ (٣) ١٢ − ١٠ = ٢

(٤) صفر (٥) ١٤ − ١٥ = −١

(٦) −١ − ٦ = −٧ (٧) −٤٢ + ٥٧ = ١٥

(٨) ب(ا + س) − ا(ب + ص)

= با + ب س − اب − ا ص

= ب س − ا ص

(٩) (س+١)(ص²+١)−(س²+١)(ص+١)

= س ص² + س + ص² + ١

− س²ص − ص − س² − ١

= س ص² + س + ص²

− س²ص − ص − س²

(١٠)
$$\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ١- & ٤ & ٤ \\ ٠ & ٧ & ٨ \end{vmatrix}\begin{matrix} ١ & ٢ \\ ١- & ٤ \\ ٠ & ٧ \end{matrix}$$

= ٣٢ − ٢١ − ٢٨ + ١٦ = −١

(١١) $\begin{vmatrix} ٥ & ٠ & ٣ & ٥ & ٠ \\ ٩ & ٢ & ٧ & ٦ & ٣ \\ ١٠ & ٠ & ٢ & ١٠ & ٠ \end{vmatrix}$ = ٦٠ − ٢٠ = ٤٠

(١٢) $\begin{vmatrix} ٤- & ٣ & ٣ & ٤- & ٣ \\ ٠ & ٢ & ١- & ٠ & ٢ \\ ٠ & ٥ & ٢ & ٠ & ٥ \end{vmatrix}$

= ٦٢٠ + ١٦ = ٦٣٦

(١٣) $\begin{vmatrix} ٣ & ١٢ & ٢ & ٣ & ١٢ \\ ٧ & ٣- & ٥ & ٧ & ٣- \\ ٠ & ٠ & ١ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ = ٨٤ + ٩ = ٩٣

(١٤) المحدد مثلثي قيمته = ٦ × ٥ × ١ = ٣٠

(١٥) المحدد مثلثي قيمته = ١ × ٢ × ٣ = ٦

(١٦) المحدد مثلثي قيمته = ٤ × ٠ × ٣ = صفر

(١٧) $\begin{vmatrix} ٧ & ١- & ٢ & ٧ & ١- \\ ٠ & ٣ & ٥ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ٤ & ١ & ٠ & ٤ \end{vmatrix}$

= ٧ × ٥ × ٤ − ٢١ = ١١٩

(١٨) $\begin{vmatrix} ٤ & ٢- & ٠ & ٤ & ٢- \\ ٣- & ٢ & ١ & ٣- & ٢ \\ ٠ & ٥ & ٠ & ٠ & ٥ \end{vmatrix}$

= ٤ × ١ × ٥ = ٢٠

(١٩) $\begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ٠ & ٣ & ٠ \\ ٩ & ٥ & ٧ & ٩ & ٥ \\ ٨ & ٠ & ٠ & ٨ & ٠ \end{vmatrix}$ = صفر

(٢٠) مثلثي قيمته = ١ × ٨ × ٠ = صفر

(٢١) مثلثي قيمته = −٤ × ٦ × ٨ = −١٩٢

(٢٢) مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}\begin{vmatrix} ٤ & ٢ & ١ & ٤ & ٢ \\ ٤ & ٢- & ١ & ٤ & ٢- \\ ٢- & ٠ & ١ & ٢- & ٠ \end{vmatrix}$

$= \frac{١}{٢}[٨ + ٤ + ٤ + ٨] = ١٢$

(٢٣) مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}\begin{vmatrix} ٣ & ٣ & ١ & ٣ & ٣ \\ ٢ & ٤- & ١ & ٢ & ٤- \\ ٤- & ١ & ١ & ٤- & ١ \end{vmatrix}$

$\frac{٤٧}{٢} = [١٢ + ١٢ + ٢ - ١٦ + ٣ + ٦]\frac{١}{٢} =$

(٢٤) $\frac{٣١}{٢} = [٦+٦+٤+٩+٨+٢-]\frac{١}{٢} =$

(٢٥) $\frac{٩}{٢} = [٦ - ١٥ + ٦ + ٦ - صفر]\frac{١}{٢} =$

إرشادات تمارين (٥) على حل نظام من المعادلات الخطية بطريقة كرامر

(١) م . ح = {(٦ ، ٢)}

(٢) م . ح = $\{(\frac{٤}{٥} ، \frac{-٩}{٥})\}$

(٣) م . ح = {(٠ ، ٠)}

(٤) م . ح = $\{(\frac{٢}{٧} ، \frac{١٠}{٧})\}$

(٥) م . ح = $\{(\frac{٢}{٧} ، \frac{-١}{٧})\}$

(٦) م . ح = {(-١ ، ٢ ، ٣)}

(٧) م . ح = {(٠ ، -١ ، ٠)}

(٨) م . ح = {(١ ، ٢ ، -٢)}

(٩) م . ح = {(٢ ، ٢ ، ٠)}

(١٠) م . ح = $\{(\frac{٥}{٣} ، \frac{٦٥}{١٢} ، \frac{-١١}{١٢})\}$

إرشادات تمارين (٦) على المعكوس الضربي للمصفوفة

(١) Δ = ٨ ≠ ٠ له معكوس

$\begin{pmatrix} ٠ & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٤} & \frac{-١}{٤} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٤ \\ ٢ & ٢- \end{pmatrix}\frac{١}{٨} = ^{١-}أ$

(٢) $\begin{pmatrix} \frac{-٧}{٢} & ٣ \\ \frac{٥}{٢} & ٢- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧- & ٦ \\ ٥ & ٤- \end{pmatrix}\frac{١}{٢} = ^{١-}ب$

(٣) $\begin{pmatrix} ٣- & ٢ \\ ٥ & ٣- \end{pmatrix} = ^{١-}جـ$

(٤) $\begin{pmatrix} ٤- & ٥ \\ ٩ & ١١- \end{pmatrix} = ^{١-}د$

(٥) $\begin{pmatrix} ٣- & ٣ \\ ٩ & ١٣- \end{pmatrix}\frac{١}{١٢}- = ^{١-}هـ$

(٦) $\begin{pmatrix} ٣ & ٢- \\ \frac{-٧}{٢} & \frac{٥}{٢} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦- & ٤ \\ ٧ & ٥- \end{pmatrix}\frac{١}{٢-} = ^{١-}و$

(٧) $\begin{pmatrix} \frac{-٣}{٢} & ٢ \\ \frac{٥}{٢} & ٣- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣- & ٤ \\ ٥ & ٦- \end{pmatrix}\frac{١}{٢} = ^{١-}ز$

(٨) $\begin{pmatrix} \frac{١}{١٠} & \frac{٧}{٢٠} \\ \frac{١}{١٠} & \frac{-٣}{٢٠} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٧ \\ ٢ & ٣- \end{pmatrix}\frac{١}{٢٠} = ^{١-}ح$

(٩) $\begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{-٣}{١٠} \\ ٠ & \frac{١}{٥} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥- & ٣ \\ ٠ & ٢- \end{pmatrix}\frac{-١}{١٠} = ^{١-}ط$

(١٠) ∵ Δ = ٦٤ − ٦٤ = ٠

∴ ص ليس لها معكوس ضربي .

(١١) −١٠ + ١٠ = صفر

∴ ع ليس لها معكوس ضربي .

(١٢) قيم أ التي لا تجعل للمصفوفة معكوس ضربي هي : $س^{٢} = ٣٦$

∴ س = ±٦

∴ قيم أ التي تجعل للمصفوفة معكوس ضربي = ح − {٦ ، −٦}

(١٣) ∵ أ(أ − ٢) − ٣ = ٠

∴ $أ^{٢}$ − ٢أ − ٣ = ٠

∴ (أ − ٣)(أ + ١) = ٠

∴ أ = ٣ ، أ = −١

∴ قيم أ التي تجعل للمصفوفة ليس لها معكوس ضربي هي {٣ ، −١}

(١٤) ∵ $I = \begin{pmatrix} ٠ & ٢- \\ ١ & ٣ \end{pmatrix} \times أ$

كل منهما معكوس للآخر .

∴ $\begin{pmatrix} ٠ & \frac{-١}{٢} \\ ١ & \frac{٣}{٢} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ٢- & ٣- \end{pmatrix}\frac{-١}{٢} = أ$

(١٥) س معكوس ضربي للمصفوفة $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ٢ & ٠ \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} ٠ & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢} & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ٢ & ٠ \end{pmatrix}\frac{١}{٤} = س$

(١٦) ∵ Δ = س ص + ٠ × −س ص

= س ص ≠ ٠

∴ $\begin{pmatrix} س ص & ص \\ س & ٠ \end{pmatrix}\frac{١}{س ص} = ^{١-}ب$

$= \begin{pmatrix} ١ & \frac{١}{س} \\ \frac{١}{ص} & ٠ \end{pmatrix}$

(١٧) م . ح = {(٣ ، −١)}

(١٨) م . ح = {(−١ ، ٢)}

(١٩) م . ح = {(٢ ، ٦)}

(٢٠) م . ح = {(٥ ، ١)}

(٢١) م . ح = {(١ ، ١)}

(٢٢) أ ، ب لكل منهما معكوس ضربي للآخر

$أ = ب^{-١} = \frac{١}{٤}\begin{pmatrix} ٨ & -٥ \\ -٤ & ٢ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -٢ & \frac{٥}{٤} \\ ١ & \frac{-١٠}{٢} \end{pmatrix}$

وللتحقق :

$أ ب = \begin{pmatrix} -٢ & \frac{٥}{٤} \\ ١ & \frac{-١٠}{٢} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ٤ & ٨ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -٤+٥ & -١٠+١٠ \\ ٢-٢ & ٥-٤ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = I$

(٢٣) ∵ $أ ب = \begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٠ & ٧ \end{pmatrix}$

∴ $أ^{-١} أ ب = أ^{-١} \times \begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٠ & ٧ \end{pmatrix}$

∴ $ب = أ^{-١} \times \begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٠ & ٧ \end{pmatrix}$

$= \frac{١}{٤}\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٠ & ٧ \end{pmatrix}$

$= \frac{١}{٤}\begin{pmatrix} ١٢ & -٦+١٤ \\ ٤ & -٢+١٤ \end{pmatrix}$

∴ $ب = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ (حقق ذلك)

ارشادات الوحدة الثانية

ارشادات تمارين (١)

(١) ... س < ٣ بالقسمة على ٣

س < ١

م . ح =]-∞ ، ١[

(٢) ... س + ٢ < ٥

س < ٣

∴ م . ح =]-∞ ، ٣[

(٣) ... س > -٢ بالقسمة على ٣

∴ س > $\frac{-٢}{٣}$

∴ م . ح =]$\frac{-٢}{٣}$ ، ∞[

(٤) ... س - ٣ > -٥ ∴ س > -٥ + ٣

س > -٢

∴ م . ح =]-٢ ، ∞[

(٥) ... س ≥ ٤

س ≥ $\frac{٤}{٥}$

∴ م . ح = [$\frac{٤}{٥}$ ، ∞[

(٦) ... س ≤ ٧ بالقسمة على ٣

س ≤ $\frac{٧}{٣}$

∴ م . ح =]-∞ ، $\frac{٧}{٣}$]

(٧) ... س + ١ ≤ س ∴ ٢س - س ≤ -١

س ≤ -١

∴ م . ح =]-∞ ، -١]

(٨) ... س - ٤ ≤ س + ٨

∴ ... س - س ≤ ١٢

∴ ... س ≤ ١٢ بالقسمة على ٢

∴ م . ح = [٦ ، ∞[

(٩) س - ١ ≤ ٣س - ٥

∴ ٥ - ١ ≤ ٣س - س

∴ ٤ ≤ ٢س بالقسمة على ٢

∴ ٢ ≤ س

∴ م . ح = [٢ ، ∞[

(١٠) ٤ < س ≤ ٦ ∴ م . ح =]٤ ، ٦]

(١١) -١ - ٢ ≤ -س - ٢ ≤ ٢ - ٢

∴ -٣ ≤ -س ≤ ٠ بالضرب × -١

∴ ٠ ≤ س ≤ ٣

∴ م . ح = [٠ ، ٣]

(١٢) -٣ < ٤س + ٥ ≤ ٧

-٣ - ٥ < ٤س ≤ ٧ - ٥

-٨ < ٤س ≤ ٢ بالقسمة على ٤

∴ -٢ < س ≤ $\frac{١}{٢}$

∴ م . ح =]-٢ ، $\frac{١}{٢}$]

(١٣) س - ١ < ٢س - ٥ < س + ٥

بإضافة (-س) للأطراف

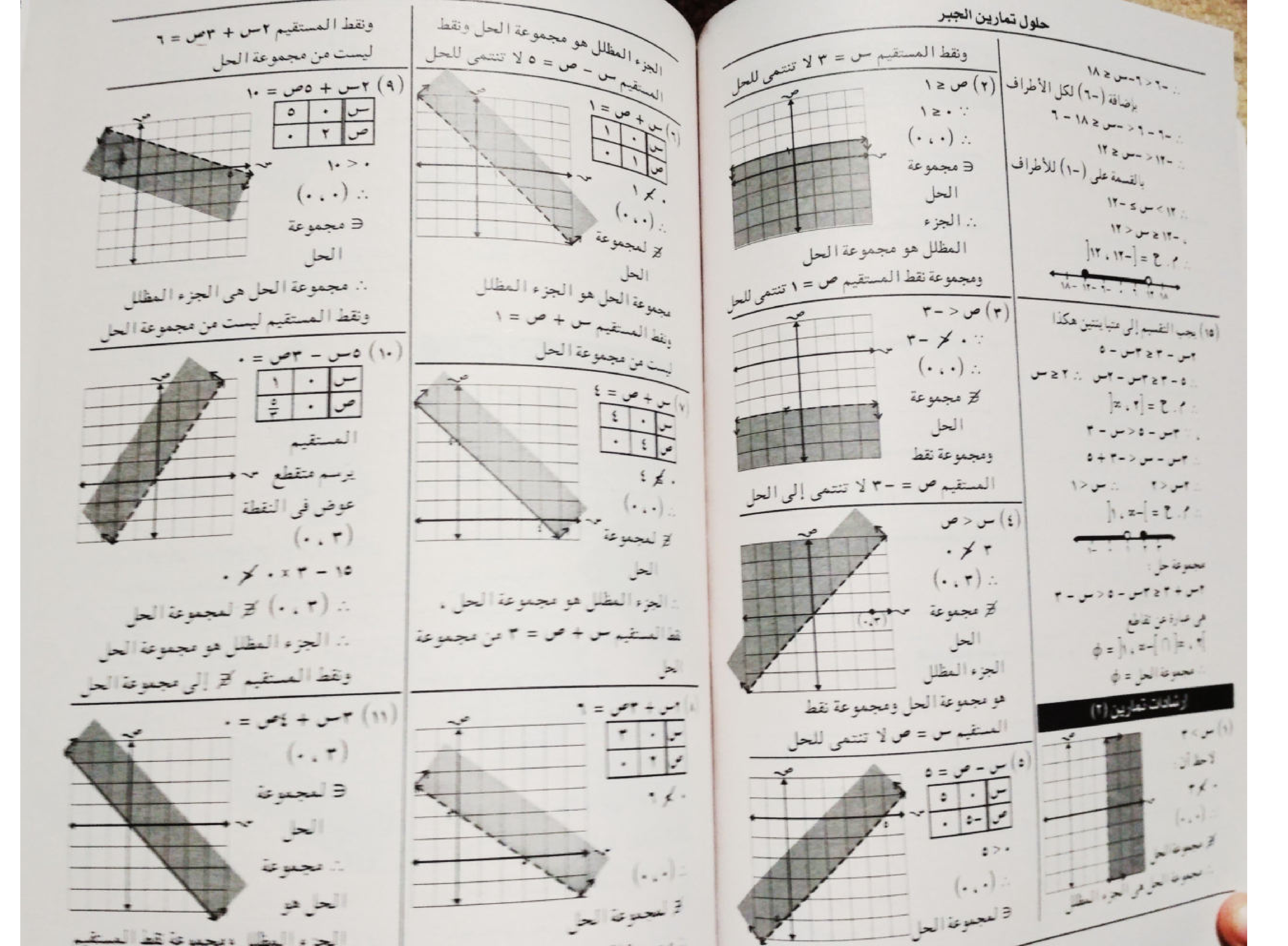
س - ١ - س < ٢س - ٥ - س < س + ٥ - س

∴ -١ < س - ٥ < ٥ بإضافة ٥ للأطراف

-١ + ٥ < س - ٥ + ٥ < ٥ + ٥

∴ ٤ < س < ١٠ ∴ م . ح =]٤ ، ١٠[

(١٤) ٣س - ٦ < ٢س + ٦ ≤ ٣س + ١٨



∴ -٦ < ٦ - س ≤ ١٨

بإضافة (-٦) لكل الأطراف

∴ -٦ - ٦ < -س ≤ ١٨ - ٦

∴ -١٢ < -س ≤ ١٢

بالقسمة على (-١) للأطراف

∴ ١٢ > س ≥ -١٢

∴ -١٢ ≤ س < ١٢

∴ م . ح = [-١٢ ، ١٢[

(١٥) يجب التقسيم إلى متباينتين هكذا

٢س - ٢ ≥ ٣س - ٥

٥ - ٢ ≥ ٣س - ٢س ∴ ٣ ≥ س

∴ م . ح =]-∞ ، ٣]

٣س - ٥ < س - ٣

٣س - س < -٣ + ٥

٢س < ٢ ∴ س < ١

∴ م . ح =]-∞ ، ١[

مجموعة حل:

٢س + ٢ ≥ ٣س - ٥ < س - ٣

هي عبارة عن تقاطع

]-∞ ، ٣] ∩]-∞ ، ١[= φ

∴ مجموعة الحل = φ

إرشادات تمارين (٢)

(١) س > ٢

لاحظ أن:

٠ ≯ ٢

∴ (٠ ، ٠) ∉ لمجموعة الحل

∴ مجموعة الحل هي الجزء المظلل

ونقط المستقيم س = ٣ لا تنتمي للحل

(٢) ص ≤ ١

∵ ٠ ≤ ١

∴ (٠ ، ٠) ∈ مجموعة الحل

∴ الجزء المظلل هو مجموعة الحل

ومجموعة نقط المستقيم ص = ١ تنتمي للحل

(٣) ص < -٣

∵ ٠ ≮ -٣

∴ (٠ ، ٠) ∉ مجموعة الحل

ومجموعة نقط المستقيم ص = -٣ لا تنتمي إلى الحل

(٤) س < ص

٣ ≮ ٠

∴ (٣ ، ٠) ∉ مجموعة الحل

الجزء المظلل هو مجموعة الحل ومجموعة نقط المستقيم س = ص لا تنتمي للحل

(٥) س - ص = ٥

س	٠	٥
ص	-٥	٠

٠ < ٥

∴ (٠ ، ٠) ∈ لمجموعة الحل

الجزء المظلل هو مجموعة الحل ونقط المستقيم س - ص = ٥ لا تنتمي للحل

(٦) س + ص = ١

س	٠	١
ص	١	٠

٠ ≯ ١

∴ (٠ ، ٠) ∉ لمجموعة الحل

مجموعة الحل هو الجزء المظلل ونقط المستقيم س + ص = ١ ليست من مجموعة الحل

(٧) س + ص = ٤

س	٠	٤
ص	٤	٠

٠ ≯ ٤

∴ (٠ ، ٠) ∉ لمجموعة الحل

∴ الجزء المظلل هو مجموعة الحل . نقط المستقيم س + ص = ٣ من مجموعة الحل

(٨) س + ٣ص = ٦

س	٠	٣
ص	٢	٠

٠ ≯ ٦

∴ (٠ ، ٠) ∉ لمجموعة الحل

ونقط المستقيم ٢س + ٣ص = ٦ ليست من مجموعة الحل

(٩) ٢س + ٥ص = ١٠

س	٠	٥
ص	٢	٠

٠ < ١٠

∴ (٠ ، ٠) ∈ مجموعة الحل

∴ مجموعة الحل هي الجزء المظلل ونقط المستقيم ليست من مجموعة الحل

(١٠) ٥س - ٣ص = ٠

س	٠	١
ص	٠	٥/٣

المستقيم يرسم متقطع عوض في النقطة (٣ ، ٠)

١٥ - ٣ × ٠ ≯ ٠

∴ (٣ ، ٠) ∉ لمجموعة الحل

∴ الجزء المظلل هو مجموعة الحل ونقط المستقيم ∉ إلى مجموعة الحل

(١١) ٣س + ٤ص = ٠

(٣ ، ٠) ∈ لمجموعة الحل

∴ مجموعة الحل هو الجزء المظلل ومجموعة نقط المستقيم

(١٢) $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} > ١$ بالضرب × ٦

٣س + ٢ص > ٦

∴ المستقيم ٣س + ٢ص = ٦

س	٠	٢
ص	٣	٠

٠ > ٦ ∴ (٠، ٠) ∈ مجموعة الحل

ونقط المستقيم نفسه ⊄ لمجموعة الحل

(١٣) بالضرب × ٦ ٩س - ٤ص > ٦

٩س - ٤ص = ٦

س	٠	$\frac{٢}{٣}$
ص	$-\frac{٣}{٢}$	٠

٠ ≯ ٦

∴ (٠، ٠) ⊄ لمجموعة الحل

∴ مجموعة الحل هو الجزء المظلل ونقط المستقيم ⊄ للحل

(١٤) $\frac{س}{٢} - ٣ \le ص$ بالضرب × ٢

س - ٦ ≤ ٢ص ، س - ٢ص = ٦

س	٠	٦
ص	-٣	٠

(٠، ٠) ⊄ لمجموعة الحل

∴ مجموعة الحل هو الجزء المظلل ونقط المستقيم ∈ إلى مجموعة الحل

(١٥) $ص \le ٢ - \frac{س}{٣}$ بالضرب × ٣

٣ص ≤ ٦ - س ، ٣ص + س ≤ ٦

∴ ٣ص + س = ٦

س	٠	٦
ص	٢	٠

٠ ≯ ٦

∴ (٠، ٠) لا تنتمى لمجموعة الحل

∴ مجموعة الحل هو الجزء المظلل ونقط المستقيم تنتمى إلى مجموعة الحل

إرشادات تمارين (٣)

(١) (أ) س - ص = ١

س	٠	١
ص	-١	٠

٠ ≯ ١

∴ (٠، ٠) لا تنتمى إلى مجموعة الحل للمتباينة س - ص > ١

(ب) س + ص = ٣

س	٠	٣
ص	٣	٠

٠ < ٣ ∴ (٠، ٠) تنتمى إلى مجموعة حل المتباينة س + ص < ٣

حل المتباينتين معًا هو الجزء المظلل ، لاحظ أن نقط المستقيمين لا تنتمى إلى مجموعة الحل

∴ نقطة تقاطع المستقيمين (٢، ١)

(٢) (أ) ٢س - ص = -٣

س	٠	$-\frac{٣}{٢}$
ص	٣	٠

∵ ٠ > -٣ ∴ (٠، ٠) ∈ لمجموعة حل المتباينة : ٢س - ص > -٣

(ب) س + ص = ١

س	٠	١
ص	١	٠

∴ (٠، ٠) ∈ لمجموعة حل المتباينة : س + ص < ١

الجزء المظلل هو مجموعة حل المتباينتين مجموعة نقط المستقيمين ⊄ مجموعة الحل

ملحوظة : نقطة التقاطع هى $(-\frac{٢}{٣} ، \frac{٥}{٣})$

(٣) (أ) $س + \frac{٣}{٤}ص > -٣$ بالضرب × ٤

٤س + ٣ص > -١٢

∴ ٤س + ٣ص = -١٢

س	٠	-٣
ص	-٤	٠

٠ > -٣ ∴ (٠، ٠) ∈ لمجموعة حل المتباينة : ٤س + ٣ص > -١٢

(ب) بالضرب × ٥ ∴ ٥س - ٢ص > -٥

∴ ٥س - ٢ص = -٥

س	٠	-١
ص	$\frac{٥}{٢}$	٠

٠ > -٥ ∴ (٠، ٠) ∈

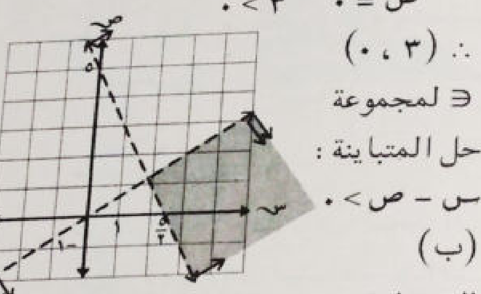
المتباينة : ٥س - ٢ص > -٥

ملحوظة : نقطة التقاطع هى $(-\frac{٣٩}{٢٣} ، -\frac{٤٠}{٢٣})$

الجزء المظلل هو مجموعة حل المتباينتين ، لاحظ أن نقط المستقيمين لا تنتمى إلى مجموعة الحل

(٤) (أ) س = ص عوض عن س = ٣ ، ص = ٠ ، ٣ > ٠

∴ (٣، ٠) ∈ لمجموعة حل المتباينة : س - ص > ٠



(ب) ٢س + ص = ٥

س	٠	$\frac{٥}{٢}$
ص	٥	٠

(٠، ٠) ⊄ مجموعة حل المتباينة : ٢س + ص > ٥

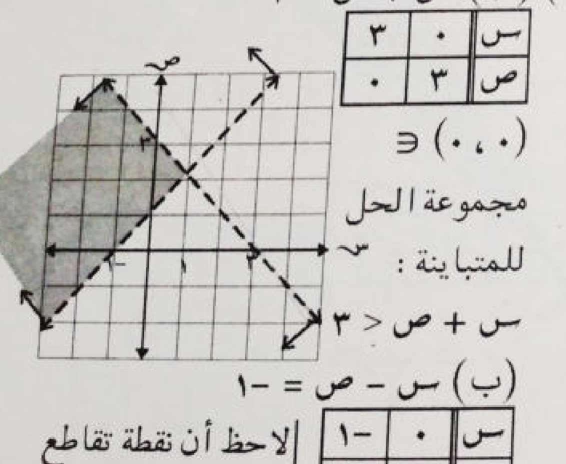
الجزء المظلل هو مجموعة حل المتباينتين معًا ، والجزأن من المستقيمين من الجزء المظلل لا ينتمى إلى مجموعة حل المتباينتين .

نقطة تقاطع المستقيمين $(\frac{٥}{٣} ، \frac{٥}{٣})$

(٥) (أ) س + ص = ٣

س	٠	٣
ص	٣	٠

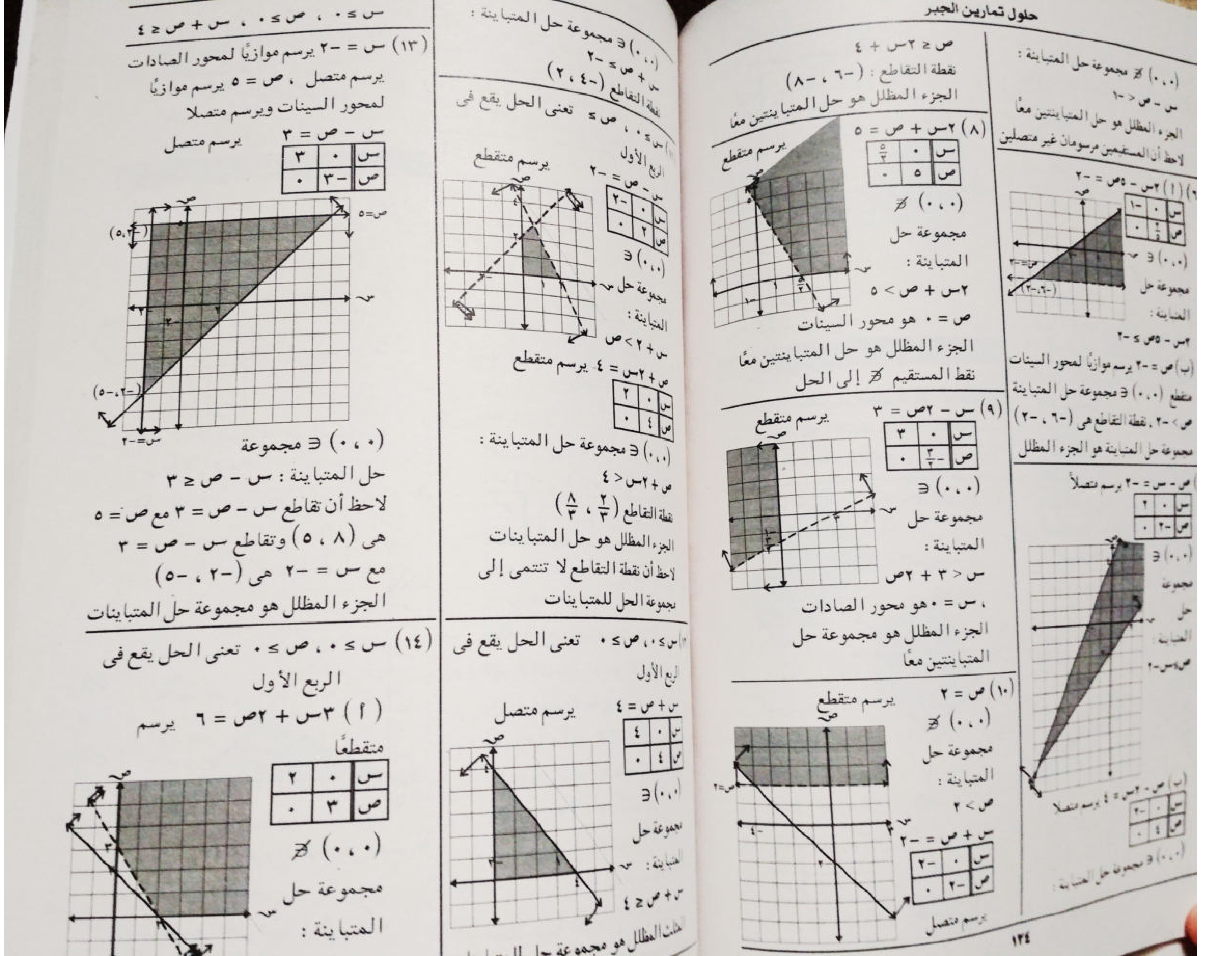
(٠، ٠) ∈ مجموعة الحل للمتباينة : س + ص < ٣



(ب) س - ص = -١

س	٠	-١
ص	١	٠

لاحظ أن نقطة تقاطع



(٠ ، ٠) ∌ مجموعة حل المتباينة :
س − ص < −١
الجزء المظلل هو حل المتباينتين معًا
لاحظ أن المستقيمين مرسومان غير متصلين

(٦) (أ) ٢س − ٥ص = −٢

س	٠	−١
ص	٢/٥	٠

(٠ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة :
٢س − ٥ص ≥ −٢

(ب) ص = −٢ يرسم موازيًا لمحور السينات متقطع (٠ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة ص > −٢ . نقطة التقاطع هى (−٦ ، −٢)
مجموعة حل المتباينة هو الجزء المظلل

(٧) ص − س = −٢ يرسم متصلاً

س	٠	٢
ص	−٢	٠

(٠ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة ص ≥ س − ٢

(ب) ص − ٢س = ٤ يرسم متصلا

س	٠	−٢
ص	٤	٠

(٠ ، ٠) ∌ مجموعة حل المتباينة :
ص ≥ ٢س + ٤
نقطة التقاطع : (−٦ ، −٨)
الجزء المظلل هو حل المتباينتين معًا

(٨) ٢س + ص = ٥ يرسم متقطع

س	٠	٥/٢
ص	٥	٠

(٠ ، ٠) ∌ مجموعة حل المتباينة :
٢س + ص > ٥
ص = ٠ هو محور السينات
الجزء المظلل هو حل المتباينتين معًا
نقط المستقيم ∌ إلى الحل

(٩) س − ٢ص = ٣ يرسم متقطع

س	٠	٣
ص	−٣/٢	٠

(٠ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة :
س < ٣ + ٢ص
، س = ٠ هو محور الصادات
الجزء المظلل هو مجموعة حل المتباينتين معًا

(١٠) ص = ٢ يرسم متقطع
(٠ ، ٠) ∌ مجموعة حل المتباينة :
ص > ٢
س + ص = −٢ يرسم متصل

س	٠	−٢
ص	−٢	٠

مجموعة حل المتباينة :
(٠ ، ٠) ∈
س + ص ≤ −٢
نقطة التقاطع (−٤ ، ٢)

(١١) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ تعنى الحل يقع فى الربع الأول
س − ص = −٢ يرسم متقطع

س	٠	−٢
ص	٢	٠

(٠ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة :
س + ٢ > ص
ص + ٢س = ٤ يرسم متقطع

س	٠	٢
ص	٤	٠

(٠ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة :
ص + ٢س < ٤
نقطة التقاطع (٢/٣ ، ٨/٣)
الجزء المظلل هو حل المتباينات
لاحظ أن نقطة التقاطع لا تنتمى إلى مجموعة الحل للمتباينات

(١٢) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ تعنى الحل يقع فى الربع الأول
س + ص = ٤ يرسم متصل

س	٠	٤
ص	٤	٠

(٠ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة :
س + ص ≤ ٤
المثلث المظلل هو مجموعة حل المتباينات

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≤ ٤

(١٣) س = −٢ يرسم موازيًا لمحور الصادات يرسم متصل ، ص = ٥ يرسم موازيًا لمحور السينات ويرسم متصلا
س − ص = ٣ يرسم متصل

س	٠	٣
ص	−٣	٠

(٠ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة : س − ص ≤ ٣
لاحظ أن تقاطع س − ص = ٣ مع ص = ٥ هى (٨ ، ٥) وتقاطع س − ص = ٣ مع س = −٢ هى (−٢ ، −٥)
الجزء المظلل هو مجموعة حل المتباينات

(١٤) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ تعنى الحل يقع فى الربع الأول
(أ) ٣س + ٢ص = ٦ يرسم متقطعًا

س	٠	٢
ص	٣	٠

(٠ ، ٠) ∌ مجموعة حل المتباينة :

(ب) س + ص = ٢ يرسم متصلاً

س	٠	٢
ص	٢	٠

(٠ ، ٠) ∌ مجموعة حل المتباينة :

س + ص ≥ ٢

الجزء المظلل هو حل المتباينات

إرشادات تمارين (٤)

(١) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ تعني أن الحلول تقع في الربع الأول

(أ) س = ٢ص يرسم متصلاً

(٣٠ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة :

س ≥ ٢ص

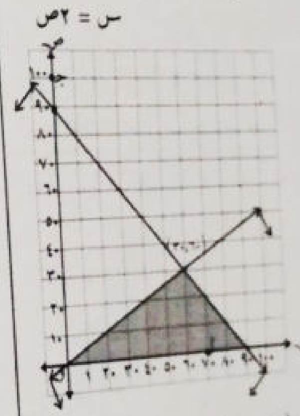
(ب) س + ص = ٩٠ يرسم متصلا

س	٠	٩٠
ص	٩٠	٠

(٠ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة :

س + ص ≤ ٩٠

نقطة تقاطع المستقيمين : س + ص = ٩٠ ، س = ٢ص



هو (٦٠ ، ٣٠) الجزء المظلل هو مجموعة حل المتباينات معًا .

رؤوس مضلع الحل هي : (٩٠ ، ٠) ، (٦٠ ، ٣٠) ، (٠ ، ٠)

ر(٠ ، ٠) = صفر أصغر قيمة

ر(٦٠ ، ٣٠) = ٥ × ٦٠ + ٣٠ × ٧

= ٣٠٠ + ٢١٠ = ٥١٠ أكبر قيمة

ر(٩٠ ، ٠) = ٥ × ٩٠ + ٧ × ٠ = ٤٥٠

∴ أكبر قيمة عند (٦٠ ، ٣٠) وتساوى ٥١٠

(٢) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ تعني أن مجموعة الحل تقع في الربع الأول

(أ) س + ٣ص = ٦ يرسم متصلاً

س	٠	٦
ص	٢	٠

(٠ ، ٠) ∌ مجموعة حل المتباينة : س + ٣ص ≥ ٦

(ب) ٣س + ٤ص = ١٢ يرسم متصلاً

س	٠	٤
ص	٣	٠

(٠ ، ٠) ∌ مجموعة حل المتباينة :

٣س + ٤ص ≥ ١٢

نقطة تقاطع المستقيمين هي ($\frac{١٢}{٥}$ ، $\frac{٦}{٥}$).

الجزء المظلل هو حل المتباينات معًا

رؤوس مضلع الحل هي :

(٦ ، ٠) ، (٠ ، ٣) ، ($\frac{١٢}{٥}$ ، $\frac{٦}{٥}$)

∴ ر(٦ ، ٠) = ٦ × ٥ + ١٠ × ٠ = ٣٠

ر(٠ ، ٣) = ٠ × ٠ + ١٠ × ٣ = ٣٠

ر($\frac{١٢}{٥}$ ، $\frac{٦}{٥}$) = ٥ × $\frac{١٢}{٥}$ + ١٠ × $\frac{٦}{٥}$

= ١٢ + ١٢ = ٢٤

أصغر قيمة عند ($\frac{١٢}{٥}$ ، $\frac{٦}{٥}$) وتساوى ٢٤

أكبر قيمة عند ... وتساوى ٣٠

(٣) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ الحل فى الربع الأول

(أ) س + ٨ص = ٣٢ يرسم متصلاً

س	٠	٣٢
ص	٤	٠

(٠ ، ٠) ∈ مجموعة الحل للمتباينة :

س + ٨ص ≤ ٣٢

(ب) ١٢س + ٨ص = ١٢٠

بالقسمة على ٤

٣س + ٢ص = ٣٠ يرسم متصلاً

س	٠	١٠
ص	١٥	٠

(٠ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة :

١٢س + ٨ص ≤ ١٢٠

نقطة التقاطع (٨ ، ٣)

رؤوس مضلع الحل هى :

(١٠ ، ٠) ، (٠ ، ٠) ، (٨ ، ٣) ، (٠ ، ٤)

ر(١٠ ، ٠) = ٢٥ × ١٠ = ٢٥٠

ر(٠ ، ٠) = صفر

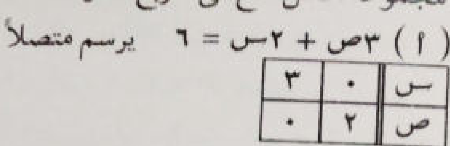
ر(٨ ، ٣) = ٢٥ × ٨ + ٤٥ × ٣

= ٢٠٠ + ١٣٥ = ٣٣٥

ر(٠ ، ٤) = ٢٥ × ٠ + ٤٥ × ٤ = ١٨٠

أكبر قيمة عند (٨ ، ٣) وتساوى ٣٣٥

وأصغر قيمة عند (٠ ، ٠) وتساوى صفرًا

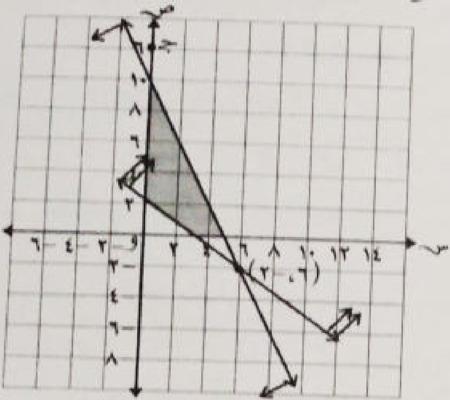


(أ) ٣ص + ٢س = ٦ يرسم متصلاً

س	٠	٣
ص	٢	٠

(٠ ، ٠) ∌ مجموعة حل المتباينة :

٣س + ٢ص ≥ ٦



(ب) ٢س + ص = ١٠ يرسم متصلاً

س	٠	٥
ص	١٠	٠

(٠ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة :

نقطة التقاطع هى (٦ ، -٢)

الجزء المظلل هو مجموعة حل المتباينات

رؤوس مضلع الحل هى :

(٥ ، ٠) ، (٣ ، ٠) ، (٠ ، ٢) ، (٠ ، ١٠)

ر(٥ ، ٠) = ٥ × ٢ + ٣ × ٠ + ٥ = ١٥

ر(٣ ، ٠) = ٣ × ٢ + ٣ × ٠ + ٥ = ١١

ر(٠ ، ٢) = ٠ × ٢ + ٣ × ٢ + ٥ = ١١

ر(٠ ، ١٠) = ٠ × ٢ + ٣ × ١٠ + ٥ = ٣٥

∴ أكبر قيمة عند (٠ ، ١٠) وتساوى ٣٥

وأصغر قيمة عند (٣ ، ٠) ، (٠ ، ٢)

وتساوى ١١

(٥) أولاً : -٣ ≤ س ≤ ٣

نرسم المستقيمان س = ٣ ، س = -٣

(٠ ، ٠) ∈ لهذه المتباينة : -٣ ≤ س ≤ ٣

ثانياً : -٤ ≤ ص ≤ ٤

نرسم المستقيمين ص = ٤ ، ص = -٤

(٠ ، ٠) ∈ لهذه المتباينة : -٤ ≤ ص ≤ ٤

∴ مجموعة حل -٣ ≤ س ≤ ٣ ،

-٤ ≤ ص ≤ ٤

هو المضلع اب جـ ء

ثالثاً : نرسم ٤س + ٣ص = ١٢ متصلاً

س	٠	٣
ص	٤	٠

(٠ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة :

٤س + ٣ص ≤ ١٢

نرسم ٤س + ٣ص = -١٢ متصلاً

س	٠	-٣
ص	-٤	٠

(٠ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة :

٤س + ٣ص ≥ -١٢

نقطة تقاطع المستقيمان :

٤س + ٣ص = ١٢ ، ٤س + ٣ص = -١٢

هو ∅

الشكل السداسي هو مجموعة حل

المتباينات ، رؤوس مضلع الحل هي :

(٣ ، ٠) ، (٣ ، -٤) ، (٠ ، -٤)

(-٣ ، ٠) ، (-٣ ، ٤) ، (٠ ، ٤)

ر(٣ ، ٠) = ٣ + ٠ - ٥ = -٢

ر(٣ ، -٤) = ٣ - ١٢ - ٥ = -١٤

ر(٠ ، -٤) = ٠ - ١٢ - ٥ = -١٧ أصغر قيمة

ر(-٣ ، ٠) = -٣ - ٥ = -٨

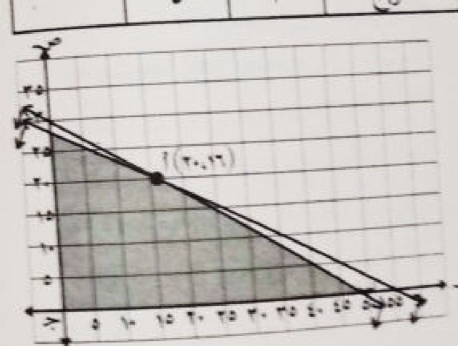
ر(-٣ ، ٤) = -٣ + ١٢ - ٥ = ٤

ر(٠ ، ٤) = ٠ + ١٢ - ٥ = ٧ أكبر قيمة

إرشادات تمارين (٥)

(١)

المتطلبات / النوع	زيوت طلاء	الورنيش	المتاح
ماكينة أ	٥/٢	٤	١٢٠
ماكينة ب	٥/٢	٥	١٤٠
العدد المفترض	س	ص	
الربح	٣	٥	



• دالة الهدف : ر(س ، ص) = ٣س + ٥ص

الحدود س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

٥/٢ س + ٤ص ≤ ١٢٠ ، ٥/٢ س + ٥ص ≤ ١٤٠

بحل المعادلتين معاً : س = ١٦ ، ص = ٢٠

رسم المعادلتين كما بالشكل

(٢)

رؤوس مضلع الحل هي (٠ ، ٠) ، (٢٨ ، ٠) ، (٠ ، ...) ، (١٦ ، ...)

ر = ... ٤٨ + ١٠٠ = ١٤٨

ر = ٣ × ٤٨ + ٠ = ١٤٤

ر = ٠ + ٥ × ٢٨ = ١٤٠

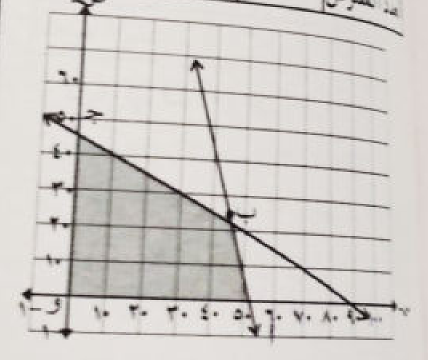
ر = ٠

أكبر قيمة عند (١٦ ، ٢٠)

عدد علب زيوت الطلاء = ١٦ ،

عدد علب الورنيش = ٢٠

المتطلبات / النوع	سفرة	مطبخ	المتاح
ماكينة أ	١	٢	٩٠
ماكينة ب	٣	١	١٥٠
الربح	٢٠٠	١٠٠	
العدد المفترض	س	ص	



دالة الهدف :

ر(س ، ص) = ٢٠٠س + ١٠٠ص

الحدود س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٢ص ≤ ٩٠ ، ٣س + ص ≤ ١٥٠

بعد رسم المعادلتين :

س + ٢ص = ٩٠ ، ٣س + ص = ١٥٠

نجد نقطة التقاطع هي (٤٢ ، ٢٤)

ر = ٢٠٠ × ٤٢ + ١٠٠ × ٢٤

= ٨٤٠٠ + ٢٤٠٠ = ١٠٨٠٠

ر = ٥٠ × ٢٠٠ = ١٠٠٠٠

ر = ٠ + ٤٥ × ١٠٠ = ٤٥٠٠

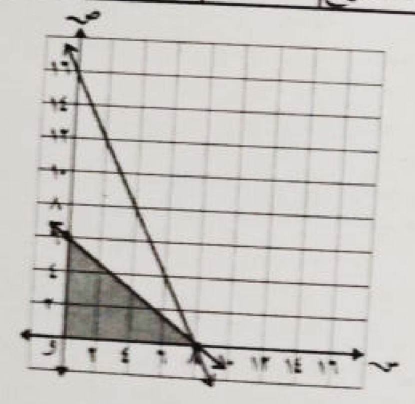
ر = ٠

أكبر قيمة عند (٤٢ ، ٢٤)

عدد السفرة = ٤٢ ، عدد المطابخ = ٢٤

(٣)

المتطلبات / النوع	طراز أ	طراز ب	المتاح
الخشب	٢	١	١٦
الساعات	٦	٨	٤٨
ثمن البيع	١٢٠٠	٨٠٠	
العدد المقترح	س	ص	



دالة الهدف :

ر(س ، ص) = ١٢٠٠س + ٨٠٠ص

الحدود : س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ،

٢س + ص ≤ ١٦ ، ٦س + ٨ص ≤ ٤٨

بعد رسم المعادلتين نجد أن نقطة

تقاطعهما (٨ ، ٠)

رؤوس مضلع الحل هي (٨ ، ٠) ،

ثانيا : حلول حساب المثلثات

تمرين حساب المثلثات (١)

المجموعة (أ) :

(١) [أ] معادلة [ب] معادلة

[جـ] معادلة [د] متطابقة

[هـ] متطابقة [و] معادلة

[ز] متطابقة

---

(٢) [أ] $\text{حا}^2\theta + \text{حتا}^2\theta + \sout{2\text{حا}\,\theta\,\text{حتا}\,\theta} - \sout{2\text{حا}\,\theta\,\text{حتا}\,\theta} = 1$

[ب] $\frac{1+\text{طا}^2\theta}{1+\text{ظتا}^2\theta} = \frac{\text{قا}^2\theta}{\text{قتا}^2\theta} = \frac{\text{حا}^2\theta}{\text{حتا}^2\theta} = \text{طا}^2\theta$

[جـ] $\frac{1}{\text{حتا}^2\theta} - \frac{1}{\text{ظتا}^2\theta} = \frac{1}{\text{حتا}^2\theta} - \frac{\text{حا}^2\theta}{\text{حتا}^2\theta}$

$= \frac{1-\text{حا}^2\theta}{\text{حتا}^2\theta} = \frac{\text{حتا}^2\theta}{\text{حتا}^2\theta} = 1$

[د] $\because \text{حا}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \text{حتا}\,\theta$

، $\text{قا}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \text{قتا}\,\theta = \frac{1}{\text{حا}\,\theta}$

$\therefore$ المقدار $= \text{حا}\,\theta \times \frac{1}{\text{حا}\,\theta} = 1$

[هـ] $\frac{\text{حتا}\,\theta}{\text{حا}\,\theta} = \text{ظتا}\,\theta$

[و] $\frac{\text{حا}\,\theta}{\text{حتا}\,\theta} \times \frac{1}{\text{حا}\,\theta} \times \text{حتا}\,\theta = 1$

[ز] $\frac{\text{حتا}\,\theta}{\text{حا}\,\theta} - \frac{\text{حا}\,\theta}{-\text{حتا}\,\theta}$

$= \frac{\text{حتا}^2\theta + \text{حا}^2\theta}{\text{حا}\,\theta\,\text{حتا}\,\theta} = \frac{1}{\text{حا}\,\theta} \times \frac{1}{\text{حتا}\,\theta}$

$= \text{قا}\,\theta\;\text{قتا}\,\theta$

[ح] $\frac{\text{حا}\,\theta}{\text{حا}\,\theta} + \frac{\text{حا}^2\theta}{\text{حا}^2\theta} = 1 + 1 = 2$

[ط] $\text{حا}\,\theta \times \frac{1}{\text{حتا}\,\theta} \times \frac{\text{حتا}\,\theta}{\text{حا}\,\theta}$

$+ \frac{1}{\text{حا}\,\theta} \times \frac{\text{حا}\,\theta}{\text{حتا}\,\theta} \times \frac{\text{حتا}\,\theta}{1}$

$= 1 + 1 = 2$

---

(٣) [أ] الطرف الأيمن :

$= \frac{\text{قتا}^2\theta}{\text{قا}^2\theta} = \frac{\text{حتا}^2\theta}{\text{حا}^2\theta} = \text{ظتا}^2\theta =$ الأيسر

[ب] الطرف الأيمن $= \dfrac{\frac{\text{حا}\,\theta}{\text{حتا}\,\theta} + \frac{\text{حتا}\,\theta}{\text{حا}\,\theta}}{\frac{1}{\text{حتا}\,\theta} \times \frac{1}{\text{حا}\,\theta}}$

$= \text{حا}\,\theta\,\text{حتا}\,\theta \left(\frac{\text{حا}\,\theta}{\text{حتا}\,\theta} + \frac{\text{حتا}\,\theta}{\text{حا}\,\theta}\right)$

$= \text{حا}^2\theta + \text{حتا}^2\theta = 1 =$ الأيسر

[جـ] الطرف الأيمن $= \left(\frac{1}{\text{حتا}\,\theta} - \frac{\text{حا}\,\theta}{\text{حتا}\,\theta}\right)^2$

$= \left(\frac{1-\text{حا}\,\theta}{\text{حتا}\,\theta}\right)^2$

$= \frac{(1-\text{حا}\,\theta)^2}{\text{حتا}^2\theta} = \frac{(1-\text{حا}\,\theta)^2}{1-\text{حا}^2\theta}$

$= \frac{(1-\text{حا}\,\theta)^2}{(1-\text{حا}\,\theta)(1+\text{حا}\,\theta)}$

$= \frac{1-\text{حا}\,\theta}{1+\text{حا}\,\theta} =$ الأيسر

[د] الطرف الأيمن

$= \dfrac{1 - \text{حتا}^2\theta - \text{حا}^2\theta + \text{حا}^2\theta\,\text{حتا}^2\theta}{\frac{\text{حا}^2\theta}{\text{حتا}^2\theta}}$

$= \dfrac{1 - (\text{حتا}^2\theta + \text{حا}^2\theta) + \text{حا}^2\theta\,\text{حتا}^2\theta}{\frac{\text{حا}^2\theta}{\text{حتا}^2\theta}}$

$= \frac{\text{حتا}^2\theta\,(1 - 1 + \text{حا}^2\theta\,\text{حتا}^2\theta)}{\text{حا}^2\theta}$

$= \frac{\text{حا}^2\theta\,\text{حتا}^4\theta}{\text{حا}^2\theta} = \text{حتا}^4\theta =$ الأيسر

[هـ] الأيمن $= \dfrac{\frac{\text{حا}\,\theta\,\text{حتا}\,\theta}{\frac{\text{حا}\,\theta}{\text{حتا}\,\theta}} + \frac{\frac{\text{حا}\,\theta}{\text{حتا}\,\theta}}{\frac{1}{\text{حتا}\,\theta} \times \frac{1}{\text{حا}\,\theta}}}{}$

$= \frac{\text{حا}\,\theta\,\text{حتا}^2\theta}{\text{حا}\,\theta} + \frac{\text{حا}\,\theta\,\text{حتا}\,\theta \times \text{حا}\,\theta}{\text{حتا}\,\theta}$

$= \text{حتا}^2\theta + \text{حا}^2\theta = 1 =$ الأيسر

المجموعة (ب) :

(١) الأيمن $= \frac{(\text{حتا}^2\text{جـ} - \text{حا}^2\text{جـ})(\text{حتا}^2\text{جـ} + \text{حا}^2\text{جـ})}{(\ldots\text{جـ})}$

$= \frac{(\text{حتا جـ} + \text{حا جـ})\,\sout{(\text{حتا جـ} - \text{حا جـ})}}{\sout{(\ldots\text{جـ})}}$

$= \text{حتا جـ} + \text{حا جـ} =$ الأيسر

---

(٢) الأيمن $= \text{حتا}^2\text{جـ}\,\text{حتا}^2\text{جـ} + \text{حا}^2\text{جـ}$

$= (1 - \text{حا}^2\text{جـ})\,\text{حتا}^2\text{جـ} + \text{حا}^2\text{جـ}$

$= \text{حتا}^2\text{جـ} - \text{حا}^2\text{جـ}\,\text{حتا}^2\text{جـ} + \text{حا}^2\text{جـ}$

$= \text{حتا}^2\text{جـ} + \text{حا}^2\text{جـ}\,(-\text{حتا}^2\text{جـ} + 1)$

$= \text{حتا}^2\text{جـ} + \text{حا}^2\text{جـ} \times \text{حا}^2\text{جـ}$

$= \text{حتا}^2\text{جـ} + \text{حا}^4\text{جـ} =$ الأيسر

---

(٣) $\text{قتا}^2\text{جـ} + \text{قا}^2\text{جـ} = \frac{1}{\text{حا}^2\text{جـ}} + \frac{1}{\text{حتا}^2\text{جـ}}$

$= \frac{\text{حتا}^2\text{جـ} + \text{حا}^2\text{جـ}}{\text{حا}^2\text{جـ}\,\text{حتا}^2\text{جـ}}$

$= \frac{1}{\text{حا}^2\text{جـ}\,\text{حتا}^2\text{جـ}}$

$= \frac{1}{\text{حا}^2\text{جـ}} \times \frac{1}{\text{حتا}^2\text{جـ}} = \text{قتا}^2\text{جـ}\,\text{قا}^2\text{جـ}$

---

(٤) الأيمن =

$\text{طا}^2\text{س} + \text{ظتا}^2\text{س} + 2\,\text{طا س}\,\text{ظتا س}$

$= \text{قا}^2\text{س} - 1 + \text{قتا}^2\text{س} - 1 + 2$

$= \text{قا}^2\text{س} + \text{قتا}^2\text{س} =$ الأيسر

حيث $\text{طا س}\,\text{ظتا س} = 1$

، $\text{طا}^2\text{س} = \text{قا}^2\text{س} - 1$

، $\text{ظتا}^2\text{س} = \text{قتا}^2\text{س} - 1$

---

(٥) $\text{حا ب}\,\text{طا ب} = \text{حا ب} \times \frac{\text{حا ب}}{\text{حتا ب}}$

$= \frac{\text{حا}^2\text{ب}}{\text{حتا ب}} = \frac{1 - \text{حتا}^2\text{ب}}{\text{حتا ب}} =$ الأيسر

---

(٦) الأيمن $= \frac{\text{حتا س}}{\text{حا س}} + \frac{\text{حا س}}{\text{حتا س}}$

$= \frac{\text{حتا}^2\text{س} + \text{حا}^2\text{س}}{\text{حا س}\,\text{حتا س}}$

$= \frac{1}{\text{حا س}\,\text{حتا س}} = \text{قتا س}\,\text{قا س}$

---

(٧) الأيمن $= \frac{1}{\text{طا}^2\text{أ}} + 1$

$= \frac{\text{حتا}^2\text{أ}}{\text{حا}^2\text{أ}} + 1$

$= \frac{\text{حتا}^2\text{أ} + \text{حا}^2\text{أ}}{\text{حا}^2\text{أ}} = \frac{1}{\text{حا}^2\text{أ}}$

---

(٨) الأيمن $= (1 - \text{طا}^2\text{جـ})\,(1 + \text{طا}^2\text{جـ})$

$= \left(1 - \frac{\text{حا}^2\text{جـ}}{\text{حتا}^2\text{جـ}}\right)\text{قا}^2\text{جـ}$

$= \left(\frac{\text{حتا}^2\text{جـ} - \text{حا}^2\text{جـ}}{\text{حتا}^2\text{جـ}}\right)\text{قا}^2\text{جـ}$

= (حا²جـ - (١ - حتا²جـ) / حا²جـ) قا²جـ

= (٢حا²جـ / حا²جـ - ١ / حا²جـ) قا²جـ

= (٢ - قا²جـ) قا²جـ

= ٢قا²جـ - قا⁴جـ

(٩) الطرف الأيمن = (حا س - حتا س)(حا²س - حا س حتا س + حتا²س) / (حا س - حتا س) + (حا س + حتا س)(حا²س + حا س حتا س + حتا²س) / (حا س + حتا س)

= ٢حا²س + ٢حتا²س + حا س حتا س - حا س حتا س

= ٢(حا²س + حتا²س) = ٢

= الأيسر

(١٠) الأيمن = حا²جـ / حتا²جـ - حا²ء / حتا²ء

= (حا²جـ حتا²ء - حا²ء حتا²جـ) / (حتا²جـ حتا²ء)

= (حا²جـ(١ - حا²ء) - حا²ء(١ - حا²جـ)) / (حتا²جـ حتا²ء)

= (حا²جـ - حا²جـ حا²ء - حا²ء + حا²جـ حا²ء) / (حتا²جـ حتا²ء)

= (حا²جـ - حا²ء) / (حتا²جـ حتا²ء)

(١١) الأيمن = حتا أ / حا أ × حتا أ × حا أ

= حتا²أ = ١ - حا²أ

تمرين حساب المثلثات (٢)

المجموعة (أ):

(١) حا س = ١/√٢ ∴ و(س) = ٤٥°

∵ حا س موجبة

∴ (س) تقع في الربع الأول أو الثاني

∴ و(س) = ٤٥°

و(س) = ١٨٠° - ٤٥° = ١٣٥°

∴ م . ح = {٤٥°، ١٣٥°}

(٢) حتا س = -١/٢

∵ حتا س سالبة

∴ تقع في الربع الثاني أو الثالث

∴ و(س) = ١٨٠° - ٦٠° = ١٢٠°

و(س) = ١٨٠° + ٦٠° = ٢٤٠°

∴ م . ح = {١٢٠°، ٢٤٠°}

(٣) طا²س = ٣ ∴ طا س = ±√٣

عندما طا س = √٣

(س) تقع في الربع الأول أو الثالث

∴ و(س) = ٦٠°

، و(س) = ١٨٠° + ٦٠° = ٢٤٠°

عندما طا س = -√٣

(س) تقع في الثاني أو الرابع

و(س) = ١٨٠° - ٦٠° = ١٢٠°

و(س) = ٣٦٠° - ٦٠° = ٣٠٠°

م . ح = {٦٠°، ١٢٠°، ٢٤٠°، ٣٠٠°}

(٤) حا س = حتا س بالقسمة على حتا س

طا س = ١ ∴ طا س موجبة

∴ الزاوية تقع في الربع الأول أو الثالث

∴ و(س) = ٤٥°

و(س) = ١٨٠° + ٤٥° = ٢٢٥°

∴ م . ح = {٤٥°، ٢٢٥°}

(٥) ٢حا س = طا س = حا س / حتا س

بالضرب × حتا س

٢حا س حتا س = حا س

∴ ٢حا س حتا س - حا س = ٠

∴ حا س (٢حتا س - ١) = ٠

حا س = ٠ أ، ٢حتا س = ١

و(س) = ٠ ، أ ١٨٠°

حتا س = ١/٢

∴ و(س) = ٦٠° أ، ٣٠٠°

م . ح = {٠°، ٦٠°، ١٨٠°، ٣٠٠°}

(٦) ٢حا س - ١/حا س - ١ = ٠ × حا س

٢حا²س - ١ - حا س = ٠

٢حا²س - حا س - ١ = ٠

(٢حا س + ١)(حا س - ١) = ٠

عندما حا س = -١/٢ ‖ عندما حا س = ١

حا س سالبة ‖ ∴ و(س) = ٩٠°

∴ الزاوية تقع في الثالث والرابع

∴ و(س) = ١٨٠° + ٣٠° = ٢١٠°

، و(س) = ٣٣٠°

∴ م . ح = {٩٠°، ٢١٠°، ٣٣٠°}

(٧) حا²س - ٢حتا س + ١/٤ = ٠

١ - حتا²س - ٢حتا س + ١/٤ = ٠ × -٤

-٤ + ٤حتا²س + ٨حتا س - ١ = ٠

٤حتا²س + ٨حتا س - ٥ = ٠

(٢حتا س + ٥)(٢حتا س - ١) = ٠

حتا س = -٥/٢ | ٢حتا س = ١

ليس لها حل لأن | حتا س = ١/٢

حتا س ∋ [-١، ١] | و(س) = ٦٠°، ٣٠٠°

∴ م . ح = {٦٠°، ٣٠٠°}

(٨) ٢حا س = ٤حتا س ∴ طا س = ٢

∴ و(س) = ٦٣° ٢٦´

أ، و(س) = ٢٤٣° ٢٦´

(٩) ٢حتا²س - ٥حتا س - ٣ = ٠

(٢حتا س + ١)(حتا س - ٣) = ٠

حتا س = -١/٢

حتا س = ٣ ليس لها حل

∴ و(س) = ١٢٠° أ، ٢٤٠°

∴ م . ح = {١٢٠°، ٢٤٠°}

(١٠) حا س = ٢ ليس لها حل

لأن المدى حا س = [-١، ١]

(١١) ∵ طا س = -١ ∴ و(س) = ١٣٥°

أ، و(س) = ٣١٥°

∴ م . ح = {١٣٥°، ٣١٥°}

(١٢) عوض عن حا²θ بدلالة حتا²θ

حيث: حا²θ = ١ - حتا²θ

∴ ١ - حتا²θ - حتا²θ = ١/٢

∴ ٢ حتا²θ = ١/٢ ∴ حتا²θ = ١/٤

∴ حتا θ = ±١/٢

عندما حتا θ = ١/٢ | حتا θ = -١/٢

∴ و(θ) = ٦٠° | و(θ) = ١٢٠°

أ، و(θ) = ٣٠٠° | أ، و(θ) = ٢٤٠°

∴ م . ح = {٦٠°، ١٢٠°، ٢٤٠°، ٣٠٠°}

(٣) ١ + طا² θ = قا² θ

...

المجموعة (ب) :

(١) ... ∴ و(θ) = π/٤ ، π/٤ + π

∴ ح العام = π/٤ + ط π حيث ط ∈ ص

(٢) ... ∴ الحل العام = ... حيث ط ∈ ص

(٣) ... حيث ط ∈ ص

(٤) ... حيث ط ∈ ص

(٥) ٢ حتا θ = √٣

∴ حتا θ = √٣ / ٢ ∴ و(θ) = π/٦

أ، و(θ) = ٣٣٠° وهي تكافئ −٣٠°

∴ م . ح العام = ± π/٦ + ٢πط

(٦) حتا θ = حا ٢θ ⟸ حا ٢θ = حتا θ

∴ ٢θ ± θ = π/٢ + ٢πط

∴ θ = π/٢ + ٢πط أ،

، ٣θ = π/٢ + ٢πط أ،

∴ θ = π/٦ + (٢/٣) πط

∴ م . ح = π/٢ + ٢πط أ، π/٦ + (٢/٣) πط

(٧) حا θ (حتا θ − ١) = ٠

عندما: حا θ = ٠ ∴ و(θ) = ٩٠° أ، ٢٧٠°

∴ الحل العام = π/٢ + ط π ط ∈ ص

عندما : حتا θ = ١

∴ و(θ) = صفر أ، ٣٦٠°

∴ الحل العام = ٢πط

(٨) ∵ ٢حا² θ − حا θ = ٠

∴ حا θ (٢حا θ − ١) = ٠

∴ حا θ = ٠ ∴ و(θ) = ٠

الحل العام θ = ط π

∴ ٢حا θ = ١ ∴ حا θ = ١/٢

∴ و(θ) = ٣٠° أ، ١٥٠° = π/٦ أ، ٥π/٦

∴ الحل العام = π/٦ + ٢ط π أ، ٥π/٦ + ٢ط π

(٩) حا θ (√٢ حتا θ − ١) = ٠

عندما: حا θ = ٠ ∴ و(θ) = ٠ أ، ١٨٠°

∴ الحل العام = ط π وعندما حتا θ = ١/√٢

∴ و(θ) = ٤٥° = π/٤

∴ و(θ) = ٣١٥° تكافئ − π/٤

∴ الحل العام = ± π/٤ + ٢ط π حيث ط ∈ ص

تمرين حساب المثلثات (٣)

(١) و(أ) = ٩٠° − و(جـ)

= ٩٠° − ٥٣° = ٣٧°

∴ حا جـ = أب / أجـ

∴ حا ٥٣° = أب / ٢٥

أب = ٢٥ × حا ٥٣° ≃ ٢٠ سم

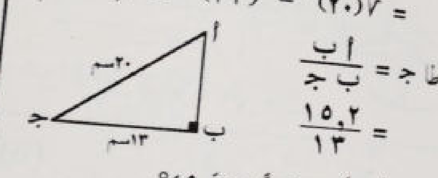
∴ طا جـ = أب / ب جـ

∴ طا ٥٣° = ٢٠ / ب جـ

∴ ب جـ = ٢٠ / طا ٥٣° ≃ ١٥ سم

(٢) أب = √((أجـ)² − (ب جـ)²)

= √((٢٠)² − (١٣)²) ≃ ١٥,٢ سم



طا جـ = أب / ب جـ

= ١٥,٢ / ١٣

∴ و(جـ) = ٣٩ً ٢٧َ ٤٩°

∴ و(أ) = ٩٠° − و(جـ)

= ٩٠° − ٣٩ً ٢٧َ ٤٩° = ٢١ً ٣٢َ ٤٠°

(٣) و(س) = ٩٠° − و(ع)

= ٣٦َ ٥٢°

∵ طا ع = س ص / ص ع

∴ طا ٢٤َ ٣٧° = ١٥ / ص ع

∴ ص ع = ١٥ / طا ٢٤َ ٣٧° = ١٩,٦ سم

= √((١٩,٦)² + (١٥)²) ≃ ٢٤,٧ سم

(٤) أب = √((١٨)² + (٢٥)²) ≃ ٣٠,٨ سم

طا ب = أجـ / ب جـ = ١٨ / ٢٥

∴ و(ب) = ٤٥َ ٣٥°

∴ و(أ) = ١٥َ ٥٤°

(٥) ∵ أ ء ⊥ ب جـ

في Δ أ ء ب فيه :

حا ب = أ ء / أب

= ٣/٤ ∴ و(ب) = ٣٥َ ٤٨°

، و(١̂) = ٢٥َ ٤١°

في Δ أ ء جـ فيه :

حا جـ = أ ء / أجـ = ٣/٥

∴ و(جـ) = ٥٢َ ٣٦°

∴ و(٢̂) = ٨َ ٥٣°

∴ و(أ) = و(٢̂) + و(١̂)

= ٣٣َ ٩٤°

(٦) من المعطيات و(ب أ ء) = ٦٠°

، و(ء أ جـ) = ٤٠°

، و(ء جـ أ) = ٥٠°

في Δ أ ء ب فيه : طا ب = أ ء / ب ء

∴ ب ء = أ ء / طا ب = ١٢ / طا ٣٠°

= ٢٠,٨ سم

حا ٣٠° = أ ء / أب ⟸ ١/٢ = ١٢ / أب

∴ أب = ٢٤ سم

في Δ أ ء جـ: ظا جـ = أ ء / ء جـ ∴ ظا ٥٠° = ١٢ / ء جـ

∴ ء جـ = ١٢ / ظا ٥٠° ≃ ١٠,١ سم

حا جـ = ١٢ / أ جـ ∴ حا ٥٠° = ١٢ / أ جـ

∴ أ جـ = ١٢ / حا ٥٠°

أ جـ = ١٥,٧ سم

ب جـ = ب ء + ء جـ

= ٢٠,٨ + ١٠,١ = ٣٠,٩ سم

(٧) من المعطيات Δ أ ب جـ فيه:

أ ب = أ جـ

، أ ء ⊥ ب جـ

∴ أ ء ينصف ب جـ

وينصف (أ) ∴ ق(ب أ ء) = ٢١°

في Δ ب أ ء: ظا (ب أ ء) = ب ء / أ ء

ظا ٢١° = ب ء / ١٠

ب ء = ١٠ ظا ٢١° ≃ ٣,٨ سم

ب جـ = ٢ × ٣,٨ ≃ ٧,٦ سم

(٨) أ ب قطر ∴ ق(أ جـ ب) = ٩٠°

∴ Δ أ ب جـ قائم في جـ

حا ٣٧° = أ جـ / أ ب

∴ أ ب = أ جـ / حا ٣٧° = ١٢ / حا ٣٧°

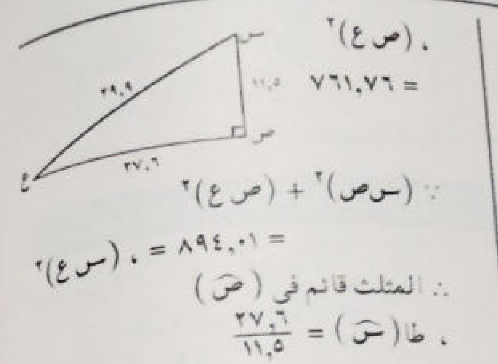
= ١٥,٠٢٥٦٢٧٩

أ ب قطر ∴ نق = ٧,٥١ سم

(٩) (س ص)² = ١٣٢,٢٥

، (س ع)² = ٨٩٤,٠١

، (ص ع)² = ٧٦١,٧٦



∵ (س ص)² + (ص ع)² = ٨٩٤,٠١ ، (س ع)² = ٨٩٤,٠١

∴ المثلث قائم في (ص)

، ظا (س) = ٢٧,٦ / ١١,٥

∴ ق(س) ≃ ٤٨ ً ٢٢ َ ٦٧°

(١٠) نرسم م ء ⊥ أ ب

∴ من خواص الدائرة ، ء منتصف أ ب

، ق(أ م ء) = ١٠٨° ÷ ٢ = ٥٤°

في Δ أ م ء القائم في ء

∴ حا (أ م ء) = أ ء / أ م

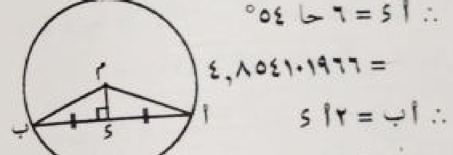
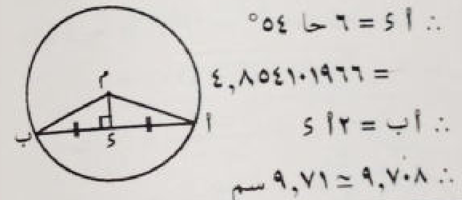
∴ حا ٥٤° = أ ء / ٦

∴ أ ء = ٦ حا ٥٤°

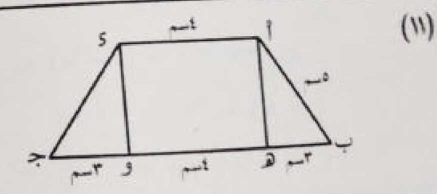
= ٤,٨٥٤١٠١٩٦٦

∴ أ ب = ٢ أ ء

∴ ٩,٧٠٨ ≃ ٩,٧١ سم

(١١)



حتا ب = ٣/٥

∴ ق(ب) = ٤٩ ً ٧ َ ٥٣°

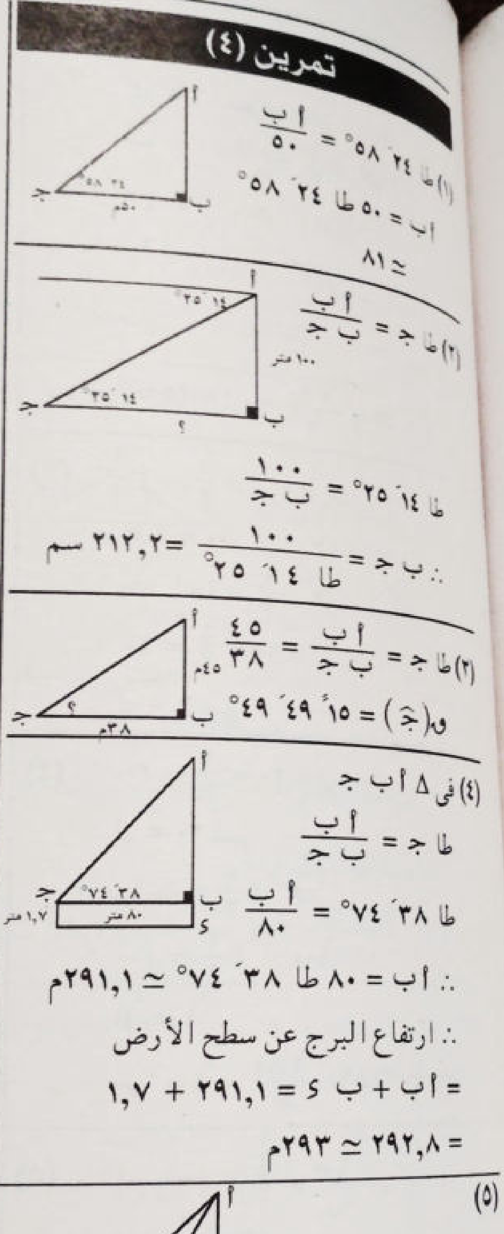
∴ ق(ب أ هـ) = ٩٠ − ٤٩ ً ٧ َ ٥٣°

= ١٢ ً ٥٢ َ ٣٦°

∴ ق(أ) = ١٢ ً ٥٢ َ ٣٦° + ٩٠°

= ١٢ ً ٥٢ َ ١٢٦°

تمرين (٤)



(١) ظا ٢٤ َ ٥٨° = أ ب / ٥٠

أ ب = ٥٠ ظا ٢٤ َ ٥٨°

≃ ٨١

(٢) ظا جـ = أ ب / ب جـ

ظا ١٤ َ ٢٥° = ١٠٠ / ب جـ

∴ ب جـ = ١٠٠ / ظا ١٤ َ ٢٥° = ٢١٢,٢ سم

(٣) ظا جـ = أ ب / ب جـ = ٤٥ / ٣٨

ق(جـ) = ١٥ ً ٤٩ َ ٤٩°

(٤) في Δ أ ب جـ

ظا جـ = أ ب / ب جـ

ظا ٣٨ َ ٧٤° = أ ب / ٨٠

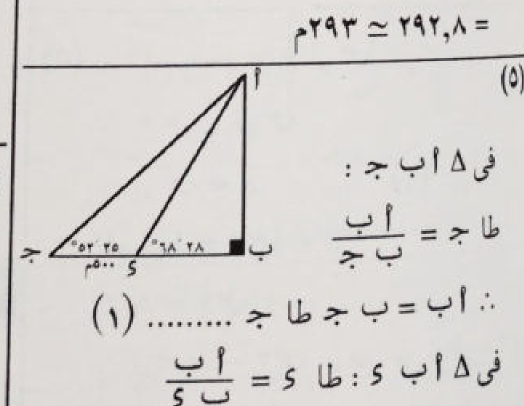
∴ أ ب = ٨٠ ظا ٣٨ َ ٧٤° ≃ ٢٩١,١م

∴ ارتفاع البرج عن سطح الأرض

= أ ب + ب ء = ٢٩١,١ + ١,٧

= ٢٩٢,٨ ≃ ٢٩٣م

(٥)



في Δ أ ب جـ:

ظا جـ = أ ب / ب جـ

∴ أ ب = ب جـ ظا جـ .... (١)

في Δ أ ب ء: ظا ء = أ ب / ب ء

ب جـ ظا جـ = ب ء ظا ء

(ب ء + ٥٠٠) ظا جـ = ب ء ظا ء

ب ء ظا جـ + ٥٠٠ ظا جـ = ب ء ظا ء

ب ء ظا ء − ب ء ظا جـ = ٥٠٠ ظا جـ

ب ء (ظا ء − ظا جـ) = ٥٠٠ ظا جـ

∴ ب ء = ٥٠٠ ظا جـ / (ظا ء − ظا جـ)

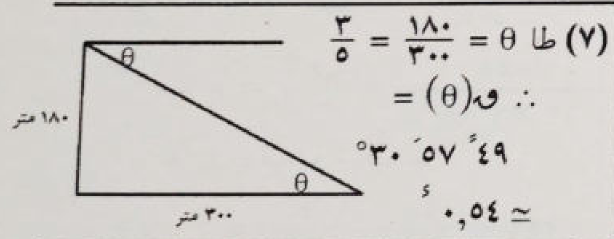
عوض عن ق(جـ) ، ق(ء)

∴ ب ء = ٦٤٩,٦٥ / ١,٢٣ ≃ ٥٢٦,٠٣م

∴ أ ب = ٥٢٦,٠٣ ظا ٢٨ َ ٦٨°

≃ ١٣٣٣,١٣م

(٦)



∵ ب جـ ارتفاع الطائرة

، أ جـ البعد بين الشخص والطائرة.

∵ حا ١٧ َ ٢٥° = ٨٠٠ / أ جـ

∴ أ جـ = ٨٠٠ / حا ١٧ َ ٢٥° ≃ ١٨٧٣ متر

(٧) ظا θ = ١٨٠ / ٣٠٠ = ٣/٥

∴ ق(θ) = ٤٩ ً ٥٧ َ ٣٠°

≃ ٠,٥٤ ء

(٨) بفرض أن ارتفاع الصخرة هو أ ب وأن البعد بين السفينتين هو جـ ء

∴ ط ٣٨° = $\frac{٥٠}{ب جـ}$

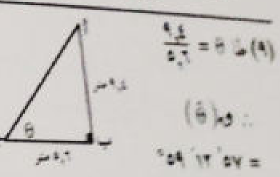
∴ ب جـ = $\frac{٥٠}{ط ٣٨°}$

فى المثلث أ ب ء : ∴ ب ء = $\frac{٥٠}{ط ٥٥°}$

∴ ء جـ = ب جـ - ب ء

∴ ء جـ = $\frac{٥٠}{ط ٣٨°} - \frac{٥٠}{ط ٥٥°}$ ≃ ٢٩ متر

(٩) ط θ = $\frac{٩,٤}{٥,٦}$



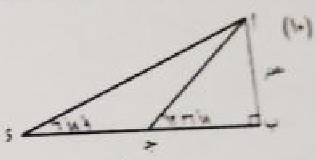
∴ ق(θ)

= ٥٩° ١٢َ ٥٧ً

∴ زاوية ارتفاع الشمس بالراديان

= ٥٩° ١٢َ ٥٧ً × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = ١,٠٢^د

(١٠)



فى Δ أ ب ء : ط ء = $\frac{أ ب}{ب ء}$

∴ ب ء = $\frac{أ ب}{ط ء}$ = $\frac{٥٠}{ط ٩° ١٨َ ٦ً}$

فى Δ أ ب جـ : ط جـ = $\frac{أ ب}{ب جـ}$

∴ ب جـ = $\frac{أ ب}{ط جـ}$ = $\frac{٥٠}{ط ١٨° ٣٦َ ١٢ً}$

جـ ء = ب ء - ب جـ

= $\frac{٥٠}{ط ء} - \frac{٥٠}{ط جـ}$ ≃ ٢٢٩

∴ السرعة = $\frac{ف}{ن}$ = $\frac{٢٢٩}{١٥}$ ≃ ١٥,٣ م/دقيقة

تمرين (٥) القطاع الدائرى

(١) مساحة القطاع = ½ ل نق

= ½ × ٦ × ٤ = ١٢ سم²

(٢) ∵ ٣٦ = ½ × ٤,٥ نق

∴ نق = ١٦ سم

∵ مساحة القطاع = ½ θ^د نق²

∴ ٣٦ = ½ × هـ^د × (١٦)²

∴ θ^د = ٠,٢٨١٢٥ (القياس الدائرى)

∴ س° = θ^د × $\frac{١٨٠°}{ط}$

س° = ٠,٢٨١٢٥ × $\frac{١٨٠°}{ط}$ = ١٦° ٦َ ٥٢ً

(٣) ∵ ٣٠ = ½ × ٠,٦ × نق²

∴ نق² = ١٠٠ ∴ نق = ١٠ سم

∵ المساحة = ½ ل نق

∴ ٣٠ = ½ × ١٠ × ل

∴ ل = ٦ سم

(٤) ∵ ٢٠٠ = ½ × ٢٠ × ل

∴ ل = ٢٠ سم

المساحة = ½ θ^د نق²

∴ ٢٠٠ = ½ θ^د × ٤٠٠

∴ θ^د = ١

∴ س° = ١^د × $\frac{١٨٠°}{ط}$ = ٥٧° ١٧َ ٤٥ً

(٥) ∵ المساحة = ½ ل نق

∴ ٤ = ½ ل نق

∴ ل نق = ٨ .... (١)

المحيط = ٢نق + ل

∴ ٨ = ٢نق + ل

∴ ل = ٨ - ٢نق عوض عن ل فى (١)

∴ (٨ - ٢نق) نق = ٨

∴ ٨نق - ٢نق² = ٨

∴ ٢نق² - ٨نق + ٨ = ٠

∴ نق² - ٤نق + ٤ = ٠

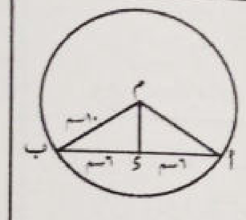
∴ (نق - ٢)² = ٠

∴ نق = ٢ ∴ ل = ٤

∵ θ^د = $\frac{ل}{نق}$ = $\frac{٤}{٢}$ = ٢^د

∴ س° = ٢ × $\frac{١٨٠°}{ط}$ = ١١٤° ٣٥َ ٣٠ً

(٦) من هندسة الشكل



م ء = ٨ سم

ط (أ م ء) = $\frac{٦}{٨}$

∴ ق(أ م ء)

= ٣٦° ٥٢َ ١١ً

∴ قياس الزاوية المركزية للقطاع الأصغر الذى وتره أب هى ٧٣° ٤٤َ ٢٣ً

∵ مساحة القطاع = $\frac{س°}{٣٦٠°}$ × مساحة الدائرة

∴ مساحة القطاع =

$\frac{٧٣,٧٤°}{٣٦٠°}$ × ط × ١٠٠ = ٦٤,٣٥ سم²

(٧) محيط القطاع = ٦٤ ∴ ٢نق + ل = ٦٤

∴ ل = ٦٤ - ٢نق

∴ ل = ٦٤ - ٢ × ٢١ = ٢٢ سم

∵ θ^د = $\frac{ل}{نق}$ = $\frac{٢٢}{٢١}$ = ١,٠٤٨^د

∴ س° = ١,٠٤٨ × $\frac{١٨٠°}{ط}$ = ٦٠° ١َ ٢٦ً

∴ المساحة = ٢٣١ سم²

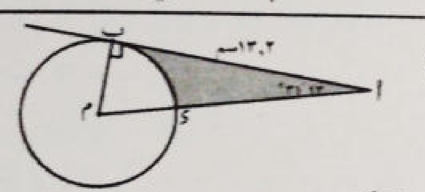
(٨) ∵ المساحة = ½ ل نق

∴ ٤٨ = ½ × ١٦نق ∴ نق = ٦ سم

∵ θ^د = $\frac{ل}{نق}$ = $\frac{١٦}{٦}$ = ٢ $\frac{٢}{٣}$^د

∴ س° = ٢ $\frac{٢}{٣}$ × $\frac{١٨٠°}{ط}$ = ١٥٢° ٤٧َ ١٩ً

(٩)



أب مماس عند ب

∴ م ب ⊥ أ ب

∴ ق(م̂) = ٩٠° - ٣١° ١٣َ = ٥٨° ٤٧َ

وهى قياس الزاوية المركزية للقطاع م ء ب

∵ مساحة الجزء المظلل المطلوب =

مساحة Δ أ ب م - مساحة القطاع م ء ب

∵ ط ٣١° ١٣َ = $\frac{م ب}{أ ب}$ = $\frac{م ب}{١٣,٢}$

∴ م ب ≃ ٨ سم = نق

مساحة Δ أ م ب = ½ × ١٣,٢ × ٨

≃ ٥٢,٨ سم²

مساحة القطاع م ء ب =

$\frac{س°}{٣٦٠°}$ × ط نق² = ٣٢,٨ سم²

حيث س° = ٥٨° ٤٧َ ، نق = ٨ سم

∴ مساحة الجزء المظلل المطلوب =

٥٢,٨ - ٣٢,٨ ≃ ٢٠ سم²

تمرين (٦) القطعة الدائرية

(١) θ^د = $\frac{١٢٠° × ط}{١٨٠°}$ = ٢,٠٩٤٣٩^د

حا ١٢٠° = ٠,٨٦٦٠٢٥

∴ مساحة القطعة الدائرية =

= ½ × ١٠٠ (٢,٠٩٤٣٩ − ٠,٨٦٦٠٢٥)

≃ ٦١ سم²

(٢) θ^ء = ٢,٣ ، θ = ١٣١° ٤٦′ ٤٩″

حا θ = ٠,٧٤٥٧٠٥

∴ مساحة القطعة =

½ (١٣)² (٢,٣ − ٠,٧٤٥٧٠٥)

≃ ١٩٩ سم²

(٣) θ^ء = ل/نق = ٢٤/١٦ = ١,٥^ء

θ = ٨٥° ٥٦′ ٣٧″

حا θ = ٠,٩٩٧٤٩٤

مساحة القطعة الدائرية

= ½ نق² (θ^ء − حا θ)

= ½ (٢٠)² (١,٥ − ٠,٩٩٧٤٩٤)

= ١٠٠,٣ سم²

(٤) ∵ ءهـ = ارتفاع القطعة

∴ نق = ١٠ سم

∴ م ء = ٥ سم

حا (ءمَ ب) = ٥/١٠

= ½

∴ ق(أ مَ ب) = ١٢٠°

وهي الزاوية المركزية للقطعة التي وترها أ ب

∴ θ^ء = ٢,٠٩٤

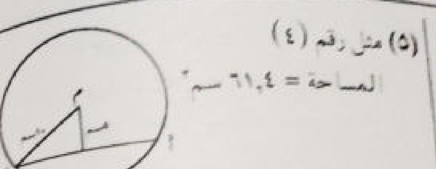
حا θ = ٠,٨٦٦٠٢٥

مساحة القطعة الدائرية = ½ نق² (θ^ء − حا θ) =

½ × ١٠٠ (٢,٠٩٤ − ٠,٨٦٦) ≃ ٦١,٤ سم²

(٥) مثل رقم (٤)

المساحة = ٦١,٤ سم²



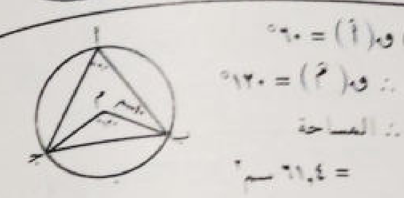
(٦) ق(أ) = ٦٠°

∴ ق(مَ) = ١٢٠°

∴ المساحة

= ٦١,٤ سم²

وهي معلومات (٤) ، (٥)



(٧) من هندسة الشكل أ ب = ١٠ سم

لأن ق(أ جـ ب) = ٩٠°

∴ نق = ٥ سم

في Δ جـ أ ب :

ظا (جـ أ ب) = ٨/٦

∴ ق(جـ أ ب) = ٥٣° ٧′ ٤٨″

في Δ م أ جـ فيه : م أ = م جـ = نق

∴ ق(أ جـ م) = ٥٣° ٧′ ٤٨″

∴ ق(أ مَ جـ) = ١٨٠° − ١٠٦° ١٥′ ٣٦″

= ٧٣° ٤٤′ ٢٣″

وهي قياس الزاوية المركزية للقطعة التي وترها أ جـ

حا (أ مَ جـ) = ٠,٩٦ ، θ^ء = ١,٢٩^ء

مساحة القطعة = ½ نق² (θ^ء − حا θ)

= ½ × ٢٥ (١,٢٩ − ٠,٩٦) ≃ ٤,١ سم²

(٨) ∵ θ^ء = ل/نق = ٢١/١٤

∴ θ^ء = ١,٥^ء

∴ ق(θ) = ٨٥° ٥٦′ ٣٧″

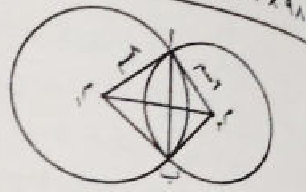
حا θ = ٠,٩٩٧٤٩٤

∴ مساحة القطعة =

½ × ١٩٦ (١,٥ − ٠,٩٩٧٤٩٤)

= ٩٨ × ٠,٥٠٢٥٠٦ ≃ ٤٩ سم²

(٦)



أ م₁ = ٦ سم ، أ م₂ = ٨ سم

، م₁ م₂ = ١٠ سم

∴ ق(م₁ أ م₂) = ٩٠°

مساحة القطعة التي وترها أ ب في الدائرة م₁

، نق = ٦ سم

∵ ظا (أ مَ₁ م₂) = ٨/٦

∴ قياس الزاوية المركزية ق(أ مَ₁ ب)

= ١٠٦° ١٥′ ٣٦″

∴ مساحة القطعة =

½ × ٣٦ (١,٨٥٤٥ − ٠,٩٦) ≃ ١٦,١٠ سم²

مساحة القطعة التي وترها أ ب في الدائرة م₂

، نق = ٨ سم

∵ ظا (م₁ مَ₂ أ) = ٦/٨

∴ قياس الزاوية المركزية ٧٣° ٤٤′ ٢٣″

θ^ء = ١,٢٨٧ ، حا θ = ٠,٩٦

∴ المساحة ١٠,٤٦٤ سم²

∴ مساحة القطعتين = ٢٦,٥٦٤ سم²

إرشادات تمارين (٧) المساحة

(١) مساحة Δ س ص ع = ½ × ١٢ × ١٨ حا ٣٨°

≃ ٦٦,٤٩ سم²

(٢) مساحة Δ أ ب جـ = ½ × ٢٥ × ١٩ حا ٥٦°

≃ ١٩٧ سم²

(٣) مساحة Δ أ ب جـ = ½ × ٢٤ × ٢٠ حا ١١٠°

≃ ٢٢٦ سم²

(٤) مساحة الشكل الرباعي

= ½ × ١٥ × ١٨ × حا ٧٧°

≃ ١٣١,٥٤٠ سم²

(٥) مساحة الشكل الرباعي

= ½ × ٣٠ × ٢١ × حا ٥٥° ≃ ٢٥٨ سم²

(٦) مساحة الشكل الرباعي

= ½ × ٤٠ × ٣٥ × حا ١٢٥° ≃ ٥٧٣ سم²

(٧) مساحة الشكل الرباعي

= ½ × ٣٢ × ٢٨ × حا ١١٠° ≃ ٢٤١ سم²

(٨) مساحة المسدس

= ½ × ٦ × (١٥)² × ظتا π/٦

= ½ × ٦ × (١٥)² × 1/ظا ٣٠ ≃ ١١٦٩ سم²

(٩) مساحة المسبع

= ½ × ٧ × (٢٤)² × ظتا π/٧ ≃ ٤١٨٦ سم²

(١٠) مساحة المثمن

= ½ × ٨ × (١٢)² × ظتا π/٨ ≃ ١٣٩١ سم²

(١١) مساحة المثلث أ ب ء

= ½ × ٨ × ٨ حا ٥٨°

= ٢٧,١٤ سم²

∵ Δ أ ء ب

∴ مساحة المعين = ٢ × ٢٧,١٤
= ٥٤,٢٨ سم²

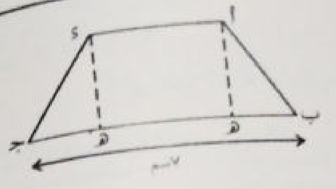
(١٣) مساحة المسدس = $\frac{1}{4}$ × ن × س² × ظتا $\frac{\pi}{ن}$

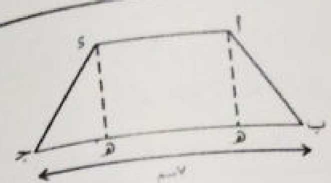
٥٤ √٣ = $\frac{1}{4}$ × ٦ × س² × $\frac{1}{ظا ٣٠}$

= $\frac{٣}{٢}$ س² × $\frac{٣}{\sqrt{٣}}$

∴ س² = ٣٦ ∴ س = ٦ متر

(١٢)

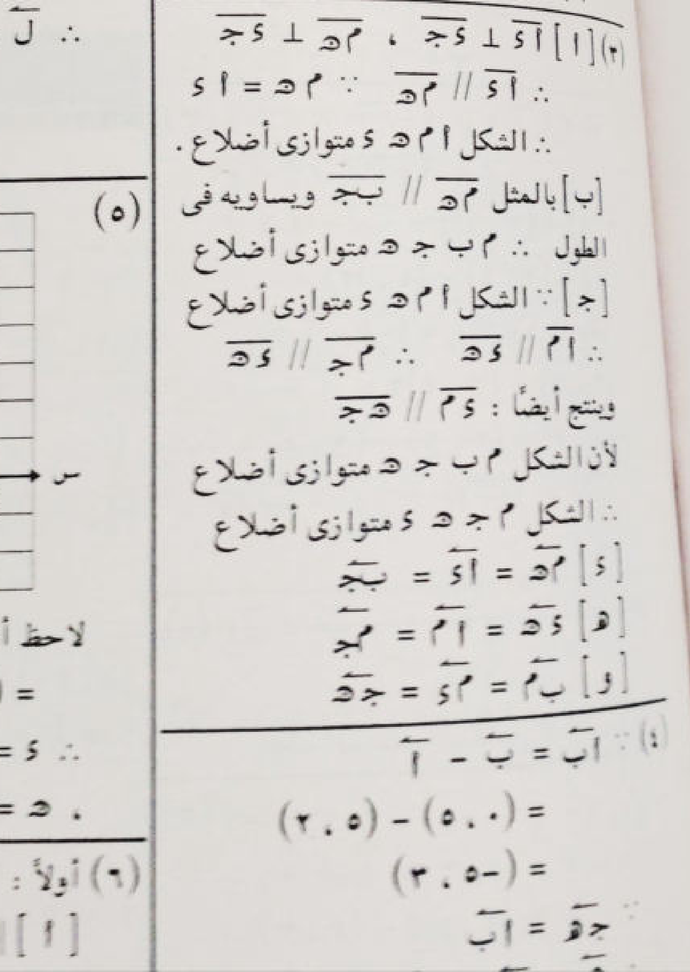




انزل الارتفاع أهـ ، ءهـ
من هندسة الشكل : هـ هـ َ = ٣ م
∴ ب هـ = هـ َ جـ = ٢ م
∴ Δ أب هـ يطابق Δ ء جـ هـ َ
∴ أهـ = ٢ ظا ٧٥° = ٧,٤٦ م
مساحة شبه المنحرف =
$\frac{1}{2}$ مجموع القاعدتين × الارتفاع
= $\frac{1}{2}$ (٣ + ٧) × ٧,٤٦ = ٣٧,٢ م²

ثالثًا : حلول الهندسة التحليلية

إرشادات تمارين (١) الكميات القياسية والكميات المتجهة والقطعة المستقيمة الموجهة

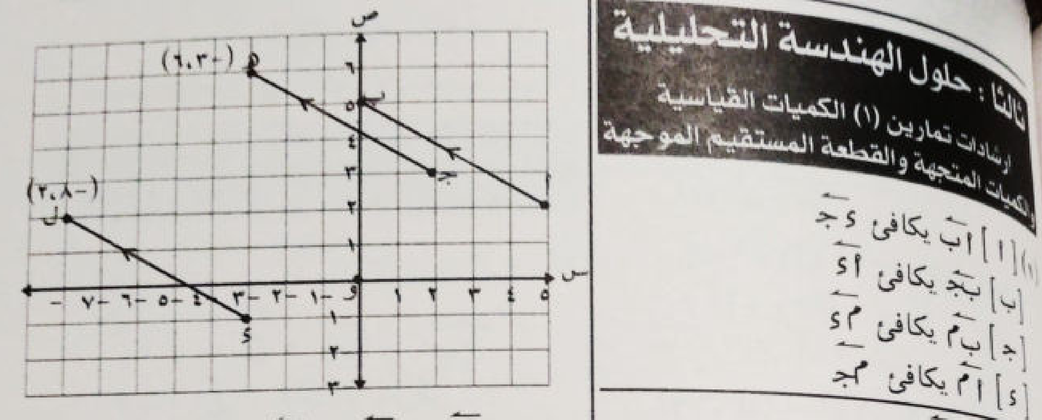


(١) [أ] $\overrightarrow{أب}$ يكافئ $\overrightarrow{ءجـ}$
[ب] $\overrightarrow{بجـ}$ يكافئ $\overrightarrow{أء}$
[جـ] $\overrightarrow{بم}$ يكافئ $\overrightarrow{مء}$
[ء] $\overrightarrow{أم}$ يكافئ $\overrightarrow{مجـ}$

(٢) $\overrightarrow{أم}$ = $\overrightarrow{مجـ}$
$\overrightarrow{بم}$ = $\overrightarrow{مء}$
$\overrightarrow{أء}$ = $\overrightarrow{بجـ}$
$\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{ءجـ}$

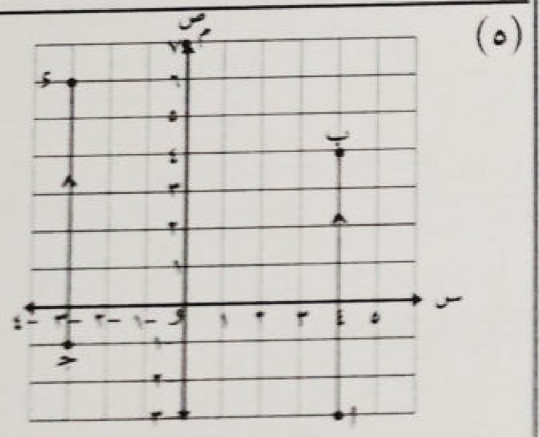
(٣) [أ] $\overline{أء} \perp \overline{ءجـ}$ ، $\overline{مهـ} \perp \overline{ءجـ}$
∴ $\overline{أء}$ // $\overline{مهـ}$ ∵ م هـ = أ ء
∴ الشكل أ م هـ ء متوازي أضلاع .
[ب] بالمثل $\overline{مهـ}$ // $\overline{بجـ}$ ويساويه في الطول ∴ م ب جـ هـ متوازي أضلاع
[جـ] ∵ الشكل أ م هـ ء متوازي أضلاع
∴ $\overline{أم}$ // $\overline{ءهـ}$ ∴ $\overline{مجـ}$ // $\overline{ءهـ}$
وينتج أيضًا : $\overline{ءم}$ // $\overline{هـجـ}$
لأن الشكل م ب جـ هـ متوازي أضلاع
∴ الشكل م جـ هـ ء متوازي أضلاع
[ء] $\overrightarrow{مهـ}$ = $\overrightarrow{أء}$ = $\overrightarrow{بجـ}$
[هـ] $\overrightarrow{ءهـ}$ = $\overrightarrow{أم}$ = $\overrightarrow{مجـ}$
[و] $\overrightarrow{بم}$ = $\overrightarrow{مء}$ = $\overrightarrow{جـهـ}$

(٤) ∵ $\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{ب}$ − $\overrightarrow{أ}$
= (٠ ، ٥) − (٥ ، ٢)
= (−٥ ، ٣)
∵ $\overrightarrow{جـهـ}$ = $\overrightarrow{أب}$



∴ $\overrightarrow{هـ}$ = $\overrightarrow{أب}$ + $\overrightarrow{جـ}$
= (−٥ ، ٣) + (٢ ، ٣)
= (−٣ ، ٦)
∵ $\overrightarrow{ءل}$ = $\overrightarrow{أب}$ ∴ $\overrightarrow{ل}$ − $\overrightarrow{ء}$ = $\overrightarrow{أب}$
∴ $\overrightarrow{ل}$ = $\overrightarrow{أب}$ + $\overrightarrow{ء}$
= (−٥ ، ٣) + (−٣ ، −١)
= (−٨ ، ٢)

(٥)



لاحظ أن : $\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{ب}$ − $\overrightarrow{أ}$
= (٤ ، ٤) − (٤ ، −٣) = (٠ ، ٧)
∴ ء = (−٣ ، ٦) ، م = (٠ ، ٧)
، هـ = (٠ ، −٧)

(٦) أولاً :
[أ] ‖ $\overrightarrow{سص}$ ‖ = ‖ $\overrightarrow{عس}$ ‖ (✓)

ب) س ص يكافئ ع ص (✗)

س ص = ع ص لكن الاتجاه مختلف

جـ) ب ص يكافئ ع س (✗)

مع أن ب ص ‖ س ع وتساويه

لكن الاتجاه مختلف

ثانياً:

أ) ب س = س أ = ص ع

ب) أ ع = ع جـ = س ص

جـ) س ع = ب ص = ص جـ

د) جـ ص = ص ب = ع س

هـ) س ص = أ ع = ع جـ

و) ع ص = أ س = س ب

إرشادات تمارين (٢) مفهوم المتجه هندسيا وجبريا

(١) أولاً: ٢ب = ٢(-٢ ، ٥) = (-٤ ، ١٠)

٣جـ = ٣(٠ ، ١١) = (٠ ، ٣٣)

أ + ب - جـ =

(٣ ، -٢) + (-٢ ، ٥) - (٠ ، ١١)

= (١ ، -٨)

½ (ب + جـ) = ½ [(-٢ ، ٥) + (٠ ، ١١)]

= ½ (-٢ ، ١٦) = (-١ ، ٨)

ثانياً: نفرض أن: ك١ ، ك٢ ∈ ح

جـ = ك١ أ + ك٢ ب

(٠ ، ١١) = ك١ (٣ ، -٢) + ك٢ (-٢ ، ٥)

٣ك١ - ٢ك٢ = ٠ ∴ ك١ = ⅔ ك٢

-٢ك١ + ٥ك٢ = ١١

-٢ × ⅔ ك٢ + ٥ك٢ = ١١

$\frac{11}{3}$ ك٢ = ١١ ∴ ك٢ = ٣ ، ك١ = ٢

جـ = ٢أ + ٣ب

(٢) ٢أ = ٢(٢ ، -٦) = (٤ ، -١٢)

-ب = (٢ ، -٥)

½ جـ = ½ × (-٦ ، ١٤) = (-٣ ، ٧)

أ + ب - جـ

= (٢ ، -٦) + (-٢ ، ٥) - (-٦ ، ١٤)

= (٦ ، -١٥)

جـ = ك أ + ك ب

(-٦ ، ١٤) = ك١ (٢ ، -٦) + ك٢ (-٢ ، ٥)

-٦ = ٢ك١ - ٢ك٢ بالقسمة على (٢)

-٣ = ك١ - ك٢ ..... (١)

∴ ١٤ = -٦ك١ + ٥ك٢ ..... (٢)

∴ ك١ = ١ ، ك٢ = ٤

∴ جـ = أ + ٤ب

(٣) ‖أ‖ = √(٣٦ + ٤) = √٤٠ = ٢√١٠

‖ب‖ = √(١٦ + ٩) = ٥

∵ ٢أ - ب = ٢(٦ ، ٢) - (٤ ، ٣)

= (١٢ ، ٤) - (٤ ، ٣) = (٨ ، ١)

∴ ‖٢أ - ب‖ = √(٦٤ + ١) = √٦٥

٢ب - أ = ٢(٤ ، ٣) - (٦ ، ٢)

= (٨ ، ٦) - (٦ ، ٢) = (٢ ، ٤)

‖٢ب - أ‖ = √(٤ + ١٦) = √٢٠

= ٢√٥

(٤) أب = ب - أ = (٣ ، ١) - (٢ ، -٣)

= (١ ، ٤)

∴ متجه الموضع المكافئ = (١ ، ٤)

(٥) أب = وجـ

∴ ب - أ = جـ - و

∴ (٣ ، ٥) - (٨ ، ٣) = جـ

∴ جـ = (-٥ ، ٢)

(٦) وبما أن ل - ق

= (٣ ، ٥) - (٢ ، -٣) = (١ ، ٨)

∴ متجه الموضع المكافئ = (١ ، ٨)

(٧) ٢أ - ٢ب + جـ

= ٢(١ ، ٥) - ٢(٠ ، -٢) + (-١ ، ٠)

= (٢ ، ١٠) + (٠ ، ٤) + (-١ ، ٠)

= (١ ، ١٤)

‖٢أ - ٢ب + جـ‖ = √(١ + ١٩٦)

= √١٩٧

(٨) ∵ أب = ب - أ

= (٧ ، ٠) - (-١ ، -٢) = (٨ ، ٢)

، د جـ = جـ - د

= (٨ ، ٤) - (٠ ، ٢) = (٨ ، ٢)

∵ أب = د جـ

(٩) ∵ أب = د جـ

ب - أ = جـ - د

∴ د = جـ + أ - ب

= (-١ ، ٥) + (٨ ، ٤) - (٥ ، ٦)

= (٢ ، ٣)

(١٠) أب = ب - أ = (١ ، ٢) - (٣ ، ١)

= (-٢ ، ١)

‖أب‖ = √(٤ + ١) = √٥

(١١) ب جـ = جـ - ب

= (٤ ، -٢) - (٥ ، ٣) = (-١ ، -٥)

٢ ب جـ = (-٢ ، -١٠)

، أب = ب - أ

= (٥ ، ٣) - (٢ ، ١) = (٣ ، ٢)

∴ ٢ ب جـ - أب

∴ ‖٢ ب جـ - أب‖

= √(٢٥ + ١٤٤) = √١٦٩ = ١٣

إرشادات تمارين (٣) الصور المختلفة للمتجه

(١) ظا θ = $\frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

∴ ق(θ) = ٣٠° = $\frac{\pi}{6}$

‖أ‖ = √(١٦ + ٤٨) = √٦٤ = ٨

∴ الصورة القطبية (٨ ، $\frac{\pi}{6}$)

(٢) س = ١٢√٢ حتا ($\frac{3\pi}{4}$)

= ١٢√٢ حتا ١٣٥°

= ١٢√٢ × $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ = -١٢

∴ ص = ١٢√٢ حا $\frac{3\pi}{4}$

= ١٢√٢ × $\frac{\sqrt{2}}{2}$ = ١٢

∴ جـ = (-١٢ ، ١٢)

(٣) ‖أ‖ = √(٩ + ١٦) = ٥ ،

أ = -٣س + ٤ص

(٤) ‖ب‖ = √(٢٥ + ١٤٤) = ١٣ ،

ب = ٥س - ١٢ص

(٥) ‖ل‖ = √(٩ + ٣٦) = √٤٥ = ٣√٥

ل = -٣س - ٦ص

(٦) ‖ع‖ = √٤٩ = ٧ ، ع = -٧س

(٧) ‖ف‖ = ٤ ، ف = ٤ص

(٨) م = (٣√٢ ، ٣√٢)

‖م‖ = √(١٨ + ١٨) = √٣٦ = ٦

ظا θ = $\frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$ = ١ ∴ ق(θ) = ٤٥°

(٩) ‖ك‖ = √(٢٥+٢٥) = √٥٠ = ٥√٢

، ظا θ = ٥/٥ = ١

∴ و(θ̂) = ٤٥° = π/٤

∴ ك = (٥√٢ ، π/٤)

(١٠) ‖ل‖ = √(٩+٢٧) = √٣٦ = ٦

ظا θ = ٣√٣/٣ = √٣

∴ و(θ̂) = ٦٠° = π/٣

∴ ل = (٦ ، π/٣)

(١١) ٢ب = ٢(-٢ ، ٥) = (-٤ ، ١٠)

= -٤س + ١٠ص

، ٣ج = ٣(٠ ، ١١) = (٠ ، ٣٣)

= ٣٣ص

، أ + ب - ج

= (٣ ، -٢) + (-٢ ، ٥) + (٠ ، -١١)

= (١ ، -٨) = س - ٨ص

½(ب + ج) = (-١ ، ٨)

= -س + ٨ص

(١٢) أ = -٦٠ص

(١٣) ب = ٥٠حتا٣٠ س + ٥٠حا٣٠ ص

= ٢٥√٣ س + ٢٥ ص

(١٤) ج = -٤٠حتا٤٥ س + ٤٠حا٤٥ ص

= -٢٠√٢ س + ٢٠√٢ ص

إرشادات تمارين (٤)
توازي متجهين وتعامدهما

(١) أ = (٣ ، -٥) ، ب = (-٦ ، ١٠)

∵ س١ص٢ - س٢ص١ = ٣ × ١٠ - -٥ × -٦

= صفر

∴ أ ، ب متوازيان .

(٢) ∵ س١ص٢ - س٢ص١ = ٤ × ٤ - ٢ × ٨

= صفر

∴ أ ، ب متوازيان .

(٣) ∵ ٣ × ٢ - -٢ × -٣ = صفر

∴ أ ، ب متوازيان .

(٤) ∵ س١ص٢ - س٢ص١

= -١٠ × -٨ - ٦ × ٢٤ = -٦٤ ≠ ٠

∴ أ ، ب غير متوازيين .

(٥) ∵ س١س٢ + ص١ص٢

= ٢ × -٦ + ٤ × ٣ = ٠

∴ أ ، ب متعامدان .

(٦) ∵ س١س٢ + ص١ص٢

= -٦ × ٤ + ٣ × ٨ = صفر

∴ أ ، ب متعامدان .

(٧) ∵ س١س٢ + ص١ص٢

= -٢ × ٢ + ١ × -٢ = -٦ ≠ ٠

∴ أ ، ب غير متعامدين .

(٨) ∵ ب + ج = (٤ ، ٦)

∵ س١ص٢ - س٢ص١

= ٢ × ٦ - ٤ × ٣ = صفر

∴ المتجهان (أ) ، (ب + ج) متوازيان

(٩) ب + ج = (-٤ ، ٢)

∵ س١س٢ + ص١ص٢

= ٢ × -٤ + ٤ × ٢ = صفر

∴ المتجهان (أ) ، (ب + ج) متعامدان

(١٠) ٢أ + ٣ب

= ٢(١ ، ٢) + ٣(٣ ، ٢)

= (٢ ، ٤) + (٩ ، ٦) = (١١ ، ١٠)

شرط التوازي : س١ص٢ - س٢ص١

= ١١ × -١٠ - -١١ × ١٠ = صفر

∴ (٢أ + ٣ب) ، ج متوازيان

(١١) ∵ أ + ب = (٣/٥ ، ٣)

، ب + ج = (٨/٥ ، ٨)

شرط التوازي : س١ص٢ - س٢ص١

= ٣/٥ × ٨ - ٣ × ٨/٥ = صفر

∴ (أ + ب) ، (ب + ج) متوازيان

(١٢) شرط التعامد : س١س٢ + ص١ص٢ = ٠

∴ ٢ × ٣ + ك × -١ = ٠ ∴ ك = ٦

(١٣) ∵ س١س٢ + ص١ص٢ = ٠

∴ ك × ك + ٨ × -٢ = ٠

∴ ك² = ١٦ ∴ ك = ±٤

(١٤) شرط التوازي : س١ص٢ - س٢ص١

∴ ٣ × ٢ - ك × -١ = ٠ ∴ ك = -٦

(١٥) س١ص٢ - س٢ص١ = ٠

٢ × ك - صفر × ٥ = ٠ ∴ ك = ٠

(١٦) شرط التوازي : -ك × ك - ١ × -٤ = ٠

-ك² + ٤ = ٠ ∴ ك² = ٤

∴ ك = ±٢

(١٧) شرط التعامد : س١س٢ + ص١ص٢ = ٠

∴ ١ × ٣ - ٢ × ك = ٠ ∴ ٢ك = ٣

∴ ك = ٣/٢

(١٨) ∵ ب - أ = (٣ ، ٤) - (٢ ، -١)

= (١ ، ٥)

شرط التوازي : س١ص٢ - س٢ص١ = ٠

∴ ك × ٥ - ١ × ١٥ = ٠

∴ ٥ك = ١٥ ∴ ك = ٣

(١٩)

واضح من الرسم أن المتجهين متعامدان

لكن أ = (٦حتا ٣٠ ، ٦ حا٣٠°)

= (٣√٣ ، ٣)

∵ ب = (٤حتا١٢٠° ، ٤حا١٢٠°)

= (-٢ ، ٢√٣)

∵ شرط التعامد : س١س٢ + ص١ص٢ = ٠

∴ ٣√٣ × -٢ + ٣ × ٢√٣ = صفر

∴ المتجهان متعامدان .

(٢٠) واضح أنهما متوازيان لأن الزاوية واحدة .

أ = (٢√٣ ، ٢) ، ب = (٣√٣ ، ٣)

شرط التوازي : س١ص٢ - س٢ص١ = ٠

∴ ٢√٣ × ٣ - ٣√٣ × ٢ = صفر

∴ أ ، ب متوازيان .

إرشادات تمارين (٥)
العمليات على المتجهات

(١) ∵ ب ج = ٣ أ د

∴ ب ج // أ د ، ب ج = ٣ أ د

∴ الشكل فيه ضلعان متوازيان وغير متساويين

∴ الشكل شبه منحرف

بفرض أن:
أجـ ∩ ب د = {م}

∵ في Δ أ م د:
∵ أم + م د = أد ..... (١)

∵ في Δ ب م جـ:
ب م + م جـ = ب جـ ..... (٢)

بجمع (١)، (٢)
∴ أم + م د + ب م + م جـ
= أد + ب جـ ...... (٣)

∵ أم + م جـ = أجـ
، ب م + م د = ب د
∵ ب جـ = ٣ أد ∴ (٣) تصبح
أجـ + ب د = أد + ٣ أد = ٤ أد

(٢)

في Δ أ ب جـ: هـ منتصف ب جـ
∵ ٢ أهـ = أب + أجـ ...... (١)
في Δ أ جـ د: ∵ أد + د جـ = أجـ
من (١)، (٢)
٢ أهـ = أب + أد + د جـ

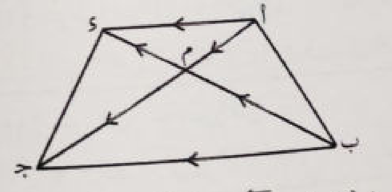
(٣) في Δ أ جـ د:
∵ أجـ + جـ د = أد .... (١)
في Δ أ د هـ:
∵ أهـ + هـ د = أد .... (٢)
من (١)، (٢) بالجمع
∵ ٢ أد = أجـ + جـ د + أهـ + هـ د .... (٣)

∵ جـ د = أ و ، أب = هـ د ..... (٤)
من (٤) عوض في (٣)
∴ ٢ أد = أجـ + أب + أهـ + أ و

(٤)

في Δ أ ب جـ:
∵ أب + ب جـ = أجـ .... (١)
في Δ أ جـ د:
أجـ + جـ د = أد ...... (٢)
في Δ أ د هـ:
أد + د هـ = أهـ ...... (٣)
من (١)، (٢)، (٣) نجد بالجمع:
أب + ب جـ + أجـ + جـ د + أد + د هـ
= أجـ + أد + أهـ
∴ أب + ب جـ + جـ د + د هـ = أهـ
بإضافة هـ أ للطرفين حيث أهـ + هـ أ = 0
∴ أب + ب جـ + جـ د + د هـ + هـ أ = 0

(٥) بفرض أن أجـ ∩ ب د = {م}



في Δ أ م د: أم + م د = أد .... (١)
في Δ ب م جـ:
ب م + م جـ = ب جـ .... (٢)
بجمع (١)، (٢):
أم + م د + ب م + م جـ = أد + ب جـ
∴ أجـ + ب د = ...

∴ أجـ + ب د = ٧/٢ أجـ
∴ ٢ أجـ + ٢ ب د = ٧ أد
ثانيًا: في Δ أ ب د:
أب + ب د = أد ..... (١)
في Δ أ جـ د:
∴ أد + د جـ = أجـ ..... (٢)
من (١)، (٢) بالطرح
∴ أب + ب د − أد − د جـ = أد − أجـ
∴ أب − د جـ = ٢ أد − أجـ − ب د
= ٢ أد − (أجـ + ب د)
ومن المطلوب الأول:
∴ أب − د جـ = ٢ أد − ٧/٢ أد
= −٣/٢ أد = ٣/٢ د أ
∴ ٢ أب − ٢ د جـ = ٣ د أ

(٦) في Δ أ م د:
د م + م أ
= د أ .... (١)
في Δ م ب جـ:
جـ م + م ب = جـ ب .... (٢)
من (١)، (٢) بالجمع
د م + م أ + جـ م + م ب = د أ + جـ ب
∴ د ب + جـ أ = د أ + جـ ب
∴ د ب − أجـ = د أ − ب جـ

(٧) القطران ينصف كل منهما الآخر.

ثانيًا: صل هـ م
في Δ هـ أ جـ:
هـ أ + هـ جـ = ٢ هـ م ..... (١)
في Δ هـ ب د:
هـ ب + هـ د = ٢ هـ م ..... (٢)
من (١)، (٢)
هـ أ + هـ جـ = هـ ب + هـ د
(المطلوب ثانيًا)

(٨) في Δ أ ب د:
أب + ب د
= أد .... (١)
بالضرب × ٢
∴ ٢ أب + ٢ ب د = ٢ أد ..... (١)َ
في Δ أ د جـ:
أجـ + جـ د = أد .... (٢) بالضرب × ٣
∴ ٣ أجـ + ٣ جـ د = ٣ أد .... (٢)َ
من (١)َ، (٢)َ بالجمع:
٢ أب + ٢ ب د + ٣ أجـ + ٣ جـ د = ٥ أد
∵ ٢ ب د = ٣ د جـ = −٣ جـ د
∴ ٢ أب − ٣ جـ د + ٣ أجـ + ٣ جـ د = ٥ أد
∴ ٢ أب + ٣ أجـ = ٥ أد

(٩) في Δ أ هـ ر:
هـ أ + أ ر = هـ ر
∵ هـ أ = ١/٣ ب أ
وفي نفس الاتجاه
∴ هـ أ = ١/٣ ب أ
بالمثل أ ر = ١/٣ أجـ
∴ هـ ر = ١/٣ ب أ + ١/٣ أجـ .... (١)

بالمثل : $\overrightarrow{\text{ء أ}} = \frac{٢}{٣}\overrightarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ ح}} = \frac{٢}{٣}\overrightarrow{\text{أ جـ}}$

∴ $\frac{٢}{٣}\overrightarrow{\text{ب أ}} + \frac{٢}{٣}\overrightarrow{\text{أ جـ}} = \overrightarrow{\text{ء ح}}$ .... (٢)

في Δ أ ب جـ :

$\overrightarrow{\text{ب أ}} + \overrightarrow{\text{أ جـ}} = \overrightarrow{\text{ب جـ}}$ .... (٣)

من (١) ، (٢) بالجمع :

$\overrightarrow{\text{ب أ}} + \overrightarrow{\text{أ جـ}} = \overrightarrow{\text{هـ ر}} + \overrightarrow{\text{ء ح}}$ .... (٤)

من (٣) ، (٤)

∴ $\overrightarrow{\text{ب جـ}} = \overrightarrow{\text{هـ ر}} + \overrightarrow{\text{ء ح}}$

إرشادات تمارين (٦) تطبيقات المتجهات

(١) المعطيات : أ ب جـ ء شكل رباعي فيه :

أ ء = ب جـ ، $\overline{\text{أ ء}} \,//\, \overline{\text{ب جـ}}$

المطلوب : إثبات أن أ ب جـ ء متوازي أضلاع

المطلوب الأساسي إثبات أن $\overline{\text{أ ب}} \,//\, \overline{\text{ء جـ}}$

العمل : نصل $\overline{\text{أ جـ}}$

البرهان : أ ء = ب جـ ، $\overline{\text{أ ء}} \,//\, \overline{\text{ب جـ}}$

⇐ $\overrightarrow{\text{أ ء}} = \overrightarrow{\text{ب جـ}}$

في Δ أ جـ ء :

∴ $\overrightarrow{\text{أ ء}} + \overrightarrow{\text{ء جـ}} = \overrightarrow{\text{أ جـ}}$ .... (١)

في Δ أ ب جـ :

∴ $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} = \overrightarrow{\text{أ جـ}}$ .... (٢)

من (١) ، (٢)

$\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} = \overrightarrow{\text{أ ء}} + \overrightarrow{\text{ء جـ}}$

∵ $\overrightarrow{\text{أ ء}} = \overrightarrow{\text{ب جـ}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{أ ب}} = \overrightarrow{\text{ء جـ}}$

∴ $\overline{\text{أ ب}} \,//\, \overline{\text{ء جـ}}$ ، أ ب = ء جـ

∴ الشكل فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين

∴ الشكل متوازي أضلاع

(٢) المعطيات : ء ، هـ منتصفي $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$

على الترتيب .

المطلوب :

إثبات أن :

$\overline{\text{ء هـ}} \,//\, \overline{\text{ب جـ}}$

البرهان : في Δ أ ب جـ :

$\overrightarrow{\text{ب أ}} + \overrightarrow{\text{أ جـ}} = \overrightarrow{\text{ب جـ}}$ .... (١)

في Δ أ ء هـ :

$\overrightarrow{\text{ء أ}} + \overrightarrow{\text{أ هـ}} = \overrightarrow{\text{ء هـ}}$ .... (٢)

∵ ء أ = $\frac{١}{٢}$ أ ب وهما في اتجاه واحد

يعني متوازيان .

∴ $\overrightarrow{\text{ء أ}} = \frac{١}{٢}\overrightarrow{\text{ب أ}}$ بالمثل

، $\overrightarrow{\text{أ هـ}} = \frac{١}{٢}\overrightarrow{\text{أ جـ}}$ (عوض في ٢)

∴ $\frac{١}{٢}\overrightarrow{\text{ب أ}} + \frac{١}{٢}\overrightarrow{\text{أ جـ}} = \overrightarrow{\text{ء هـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ب أ}} + \overrightarrow{\text{أ جـ}} = ٢\overrightarrow{\text{ء هـ}}$ ..... (٣)

قارن بين (١) ، (٣) ∴ $\overrightarrow{\text{ب جـ}} = ٢\overrightarrow{\text{ء هـ}}$

∴ $\overline{\text{ب جـ}} \,//\, \overline{\text{ء هـ}}$ ، ب جـ = ٢ هـ ء

(٣) في Δ أ ب ء :

∵ س ، ل منتصفي $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$

∵ $\overline{\text{س ل}} \,//\, \overline{\text{ب ء}}$ ، س ل = $\frac{١}{٢}$ ب ء

∴ $\overrightarrow{\text{س ل}} = \frac{١}{٢}\overrightarrow{\text{ب ء}}$ .... (١)

بالمثل يمكن إثبات أن :

$\overrightarrow{\text{ص ع}} = \frac{١}{٢}\overrightarrow{\text{ب ء}}$ .... (٢)

من (١) ، (٢)

∴ $\overrightarrow{\text{س ل}} = \overrightarrow{\text{ص ع}}$ ⇐ س ل = ص ع

∴ $\overline{\text{س ل}} \,//\, \overline{\text{ص ع}}$

∴ الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع

يتساوى ويتوازى ضلعين في الشكل الرباعي

، س ل = $\frac{١}{٢}$ ب ء ، ص ع = $\frac{١}{٢}$ ب ء

بالمثل يمكن إثبات أن :

س ص = ل ع = $\frac{١}{٢}$ أ جـ

∴ محيط س ص ع ل

= س ص + ص ع + ع ل + س ل

= $\frac{١}{٢}$ أ جـ + $\frac{١}{٢}$ ب ء + $\frac{١}{٢}$ أ جـ + $\frac{١}{٢}$ ب ء

= أ جـ + ب ء

= مجموع قطري الشكل الرباعي أ ب جـ ء

(٤) المعطيات : أ ب جـ ء شبه منحرف

$\overline{\text{أ ء}} \,//\, \overline{\text{ب جـ}}$ ، أ ء = $\frac{١}{٢}$ ب جـ

$\overrightarrow{\text{أ ب}} = \overrightarrow{\text{هـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ ء}} = \overrightarrow{\text{مـ}}$

المطلوب : أولاً : التعبير بدلالة $\overrightarrow{\text{مـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{هـ}}$

عن كل من $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ء جـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ء ب}}$

ثانياً : إذا كان س ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$ ، أ س = $\frac{١}{٣}$ أ جـ

أثبت أن النقط ء ، س ، ب على استقامة واحدة .

البرهان : ∵ $\overline{\text{أ ء}} \,//\, \overline{\text{ب جـ}}$ ، أ ء = $\frac{١}{٢}$ ب جـ

∴ $\overrightarrow{\text{أ ء}} = \frac{١}{٢}\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ أ ، $\overrightarrow{\text{ب جـ}} = ٢\overrightarrow{\text{أ ء}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ب جـ}} = ٢\overrightarrow{\text{مـ}}$ ..... (١)

في Δ أ ب جـ : ∵ $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} = \overrightarrow{\text{أ جـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{هـ}} + ٢\overrightarrow{\text{مـ}} = \overrightarrow{\text{أ جـ}}$ ..... (٢)

في Δ أ ء جـ : ∵ $\overrightarrow{\text{أ ء}} + \overrightarrow{\text{ء جـ}} = \overrightarrow{\text{أ جـ}}$

∵ $\overrightarrow{\text{أ ء}} = \overrightarrow{\text{مـ}}$ ومن (٢)

∴ $\overrightarrow{\text{مـ}} + \overrightarrow{\text{ء جـ}} = \overrightarrow{\text{هـ}} + ٢\overrightarrow{\text{مـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ء جـ}} = \overrightarrow{\text{هـ}} + \overrightarrow{\text{مـ}}$ ..... (٣)

في Δ أ ب ء : ∵ $\overrightarrow{\text{أ ء}} + \overrightarrow{\text{ء ب}} = \overrightarrow{\text{أ ب}}$

∴ $\overrightarrow{\text{مـ}} + \overrightarrow{\text{ء ب}} = \overrightarrow{\text{هـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ء ب}} = \overrightarrow{\text{هـ}} - \overrightarrow{\text{مـ}}$ ..... (٤)

من (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) المطلوب أولاً

لإثبات المطلوب الثاني صل $\overline{\text{ء س}}$ ، $\overline{\text{س ب}}$

∴ في Δ أ س ء :

$\overrightarrow{\text{أ ء}} + \overrightarrow{\text{ء س}} = \overrightarrow{\text{أ س}}$ ..... (٥)

∵ أ س = $\frac{١}{٣}$ أ جـ وهما على خط واحد

∴ $\overrightarrow{\text{أ س}} = \frac{١}{٣}\overrightarrow{\text{أ جـ}} = \frac{١}{٣}(\overrightarrow{\text{هـ}} + ٢\overrightarrow{\text{مـ}})$

عوض في (٥)

∴ $\overrightarrow{\text{مـ}} + \overrightarrow{\text{ء س}} = \frac{١}{٣}(\overrightarrow{\text{هـ}} + ٢\overrightarrow{\text{مـ}})$

∴ $\overrightarrow{\text{ء س}} = \frac{١}{٣}\overrightarrow{\text{هـ}} + \frac{٢}{٣}\overrightarrow{\text{مـ}} - \overrightarrow{\text{مـ}}$

$= \frac{١}{٣}\overrightarrow{\text{هـ}} - \frac{١}{٣}\overrightarrow{\text{مـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ء س}} = \frac{١}{٣}(\overrightarrow{\text{هـ}} - ٢\overrightarrow{\text{مـ}})$ ..... (٦)

في Δ س ب جـ :

$\overrightarrow{\text{ب س}} + \overrightarrow{\text{س جـ}} = \overrightarrow{\text{ب جـ}}$

$\overrightarrow{\text{ب س}} = \overrightarrow{\text{ب جـ}} - \overrightarrow{\text{س جـ}}$

$= ٢\overrightarrow{\text{مـ}} - \frac{٢}{٣}\overrightarrow{\text{أ جـ}}$

$= ٢\overrightarrow{\text{مـ}} - \frac{٢}{٣}(\overrightarrow{\text{هـ}} + ٢\overrightarrow{\text{مـ}})$

$= ٢\overrightarrow{\text{مـ}} - \frac{٢}{٣}\overrightarrow{\text{هـ}} - \frac{٤}{٣}\overrightarrow{\text{مـ}}$

$\overrightarrow{\text{ب س}} = \frac{٢}{٣}\overrightarrow{\text{مـ}} - \frac{٢}{٣}\overrightarrow{\text{هـ}}$

$= \frac{٢}{٣}(\overrightarrow{\text{مـ}} - \overrightarrow{\text{هـ}})$ .... (٧)

من (٦) ، (٧) : $٣\overrightarrow{\text{ء س}} = \frac{٣}{٢}\overrightarrow{\text{ب س}}$

∴ $٣\overrightarrow{\text{ء س}} = \frac{٣}{٢}\overrightarrow{\text{ب س}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ء س}} = \frac{١}{٢}\overrightarrow{\text{ب س}}$

∴ $\overline{\text{ء س}} \,//\, \overline{\text{ب س}}$ وهما مشتركان في نقطة واحدة س

∴ ء ، س ، ب على استقامة واحدة .

إرشادات تمارين (٧)
تطبيقات فيزيائية (محصلة القوى)

(١) $\overrightarrow{ح} = ٨\overrightarrow{ى}$ (٢) $\overrightarrow{ح} = ٨\overrightarrow{ى}$

(٣) $\overrightarrow{ح} = ٨\overrightarrow{ى} - ٢\overrightarrow{ى} = ٦\overrightarrow{ى}$

(٤) $\overrightarrow{ح} = ١٥٠\overrightarrow{ى} - ١٠٠\overrightarrow{ى} = ٥٠\overrightarrow{ى}$

(٥) $\overrightarrow{ح} = ٣٠\overrightarrow{ى} + ١٥\overrightarrow{ى} - ١٠\overrightarrow{ى}$
$= ٣٥\overrightarrow{ى}$

(٦) $\overrightarrow{ح} = ٥\overrightarrow{س} + ١٢\overrightarrow{ص}$
$\|\overrightarrow{ح}\| = \sqrt{٢٥ + ١٤٤} = \sqrt{١٦٩}$
$= ١٣$ نيوتن
$ظا\,\theta = \frac{١٢}{٥}$ ∴ $ق(\theta) = ظا^{-١}\left(\frac{١٢}{٥}\right)$
$= ٦٧° \; ٢٢' \; ٤٩''$

(٧) $\overrightarrow{ح} = (٢+٣+١)\overrightarrow{س} + (٤+٣+١)\overrightarrow{ص}$
$= ٦\overrightarrow{س} + ٨\overrightarrow{ص}$
$\|\overrightarrow{ح}\| = \sqrt{٣٦ + ٦٤} = \sqrt{١٠٠} = ١٠$ ث.كجم
$ظا\,\theta = \frac{٨}{٦}$
∴ $ق(\theta) = ظا^{-١}\frac{٨}{٦} \simeq ٥٣° \; ٨'$

(٨) $\overrightarrow{ح} = (-٣+٢+٢)\overrightarrow{س} + (٤+١-١)\overrightarrow{ص}$
$\overrightarrow{ح} = ٣\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص}$
∴ $\|\overrightarrow{ح}\| = \sqrt{٩ + ١٦} = ٥$ نيوتن
∴ $ظا\,\theta = \frac{٤}{٣}$
∴ $ظا^{-١}\left(\frac{٤}{٣}\right) = ٥٣° \; ٧' \; ٤٨''$

(٩) $\overrightarrow{ح} = (٢+أ+٥)\overrightarrow{س} + (٣+١+ب)\overrightarrow{ص}$
$= (٧+أ)\overrightarrow{س} + (٤+ب)\overrightarrow{ص}$
$\overrightarrow{ح} = ٥\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص}$
$= (٧+أ)\overrightarrow{س} + (٤+ب)\overrightarrow{ص}$
∴ $٥ = ٧ + أ$ ∴ $أ = -٢$
∴ $-٢ = ٤ + ب$ ∴ $ب = -٦$

ثانيًا: إذا كان: $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{0}$
∴ $٧ + أ = ٠$ ∴ $أ = -٧$
، $٤ + ب = ٠$ ∴ $ب = -٤$
معنى أن المحصلة $= \overrightarrow{0}$
أن الجسم متزن أو ساكن.

إرشادات تمارين (٨)
تطبيقات فيزيائية (السرعة النسبية)

(١)

٣٠ كم/س ، ٧٠ كم/س

الحالة الأولى: $\overrightarrow{ع}_{أب} = \overrightarrow{ع}_{ب} - \overrightarrow{ع}_{أ}$
$= ٧٠\overrightarrow{ى} - ٣٠\overrightarrow{ى} = ٤٠\overrightarrow{ى}$

٣٠ كم/س ، ٧٠ كم/س

الحالة الثانية: $\overrightarrow{ع}_{أب} = \overrightarrow{ع}_{ب} - \overrightarrow{ع}_{أ}$
$= -٧٠\overrightarrow{ى} - ٣٠\overrightarrow{ى} = -١٠٠\overrightarrow{ى}$

(٢)

٤٠ كم/س ، ٩٠ كم/س

الحالة الأولى: $\overrightarrow{ع}_{سد} = \overrightarrow{ع}_{د} - \overrightarrow{ع}_{س}$
$= ٤٠\overrightarrow{ى} - ٩٠\overrightarrow{ى} = -٥٠\overrightarrow{ى}$

٤٠ كم/س ، ٩٠ كم/س

الحالة الثانية: $\overrightarrow{ع}_{سد} = \overrightarrow{ع}_{د} - \overrightarrow{ع}_{س}$
$= -٤٠\overrightarrow{ى} - ٩٠\overrightarrow{ى} = -١٣٠\overrightarrow{ى}$

(٣)

$\overrightarrow{ع}_{أ} = ٣٠\overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ع}_{ب} = ؟$

∵ $\overrightarrow{ع}_{أب}$
$= \overrightarrow{ع}_{ب} - \overrightarrow{ع}_{أ}$
∴ $-١١٠\overrightarrow{ى} = \overrightarrow{ع}_{ب} - ٣٠\overrightarrow{ى}$
∴ $\overrightarrow{ع}_{ب} = (-١١٠ + ٣٠)\overrightarrow{ى}$
$= -٨٠\overrightarrow{ى}$
السرعة الفعلية للسيارة = ٨٠ كم/س

إرشادات الوحدة الخامسة: الخط المستقيم
إرشادات تمارين (١) على تقسيم قطعة مستقيم

(١)

$ل_{١} = ٢$ ، $ل_{٢} = ٣$ ، ب $(٥ ، ٢)$ ، جـ ، أ $(-١ ، ٧)$

∵ $\overrightarrow{ر}_{١} = (س_{١} ، ص_{١}) = (-١ ، ٧)$
∵ $\overrightarrow{ر}_{٢} = (س_{٢} ، ص_{٢}) = (٥ ، ٢)$
، $\overrightarrow{ر} = جـ = (س ، ص)$
∵ $\overrightarrow{ر} = \frac{ل_{١}\overrightarrow{ر}_{١} + ل_{٢}\overrightarrow{ر}_{٢}}{ل_{١} + ل_{٢}}$
∴ $\overrightarrow{ر} = \frac{٢(-١ ، ٧) + ٣(٥ ، ٢)}{٢ + ٣}$
، $\overrightarrow{ر} = \frac{(١٣ ، ٢٠)}{٥}$
∴ نقطة جـ $= \left(\frac{١٣}{٥} ، ٤\right)$

(٢)

$ل_{١} = ٣$ ، $ل_{٢} = ١$ ، ب $(-٥ ، ٢)$ ، جـ ، أ $(٢ ، ٥)$

$\overrightarrow{ر}_{١} = (٢ ، ٥)$ ، $\overrightarrow{ر}_{٢} = (-٥ ، ٢)$
∵ $\overrightarrow{ر} = جـ = (س ، ص)$
∵ $\overrightarrow{ر} = \frac{ل_{١}\overrightarrow{ر}_{١} + ل_{٢}\overrightarrow{ر}_{٢}}{ل_{١} + ل_{٢}}$
∴ $\overrightarrow{ر} = \frac{٣(٢ ، ٥) + ١(-٥ ، ٢)}{٣ + ١}$
، $\overrightarrow{ر} = \frac{(١ ، ١٧)}{٤}$
∴ نقطة جـ $= \left(\frac{١}{٤} ، \frac{١٧}{٤}\right)$

(٣)

$ل_{٢} = ٢$ ، $ل_{١} = ١$ ، أ $(٢ ، ٥)$ ، د ، ب $(-١ ، -١)$

$\overrightarrow{ر}_{١} = (٢ ، ٥)$ ، $\overrightarrow{ر}_{٢} = (-١ ، -١)$
∵ $\overrightarrow{ر} = د = (س ، ص)$
∵ $\overrightarrow{ر} = \frac{ل_{١}\overrightarrow{ر}_{١} + ل_{٢}\overrightarrow{ر}_{٢}}{ل_{١} + ل_{٢}}$
∴ $\overrightarrow{ر} = \frac{(٢ ، ٥) + ٢(-١ ، -١)}{٢ + ١}$
، $\overrightarrow{ر} = \frac{(٠ ، ٣)}{٣} = (٠ ، ١)$
∴ نقطة د $= (٠ ، ١)$

(٤) ∵ ٥أجـ = ٣أب
∴ $\frac{أجـ}{أب} = \frac{٣}{٥}$ ، $\frac{أجـ}{بجـ} = \frac{٣}{٢}$

$ل_{١} = ٢$ ، $ل_{٢} = ٣$ ، ب $(-٥ ، -١)$ ، جـ ، أ $(٤ ، ٢)$

$\overrightarrow{ر}_{١} = (٤ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ر}_{٢} = (-٥ ، -١)$
∵ $\overrightarrow{ر} = جـ = (س ، ص)$
∵ $\overrightarrow{ر} = \frac{ل_{١}\overrightarrow{ر}_{١} + ل_{٢}\overrightarrow{ر}_{٢}}{ل_{١} + ل_{٢}}$
∴ $\overrightarrow{ر} = \frac{٢(٤ ، ٢) + ٣(-٥ ، -١)}{٢ + ٣}$
، $\overrightarrow{ر} = \frac{(-٧ ، ١)}{٥} = \left(\frac{-٧}{٥} ، \frac{١}{٥}\right)$
∴ نقطة جـ $= \left(\frac{-٧}{٥} ، \frac{١}{٥}\right)$

(٥)

$ل_{١} = ٣$ ، $ل_{٢} = ١$ ، ب $(٧ ، ٥)$ ، جـ ، أ $(-١ ، ١)$

$\overrightarrow{ر}_{١} = (-١ ، ١)$ ، $\overrightarrow{ر}_{٢} = (٧ ، ٥)$

$\because$ م = ج = (س ، ص)

م = $\frac{ل_1 م_2 + ل_2 م_1}{ل_1 + ل_2}$

م = $\frac{٣(-١ ، ١) + ١(٧ ، ٥)}{١ + ٣}$

م = $\frac{(٤ ، ٨)}{٤}$ = (١ ، ٢)

$\therefore$ نقطة ج = (١ ، ٢)

(٦)

م = (-٥ ، ٢) ، م = (٣ ، ٤)

$\because$ م = د = (س ، ص)

$\frac{ل_1}{ل_2} = \frac{٣}{-١}$

م = $\frac{ل_1 م_2 + ل_2 م_1}{ل_1 + ل_2}$

م = $\frac{-١(-٥ ، ٢) + ٣(٣ ، ٤)}{-١ + ٣}$

$\therefore$ م = $\frac{(١٤ ، ١٠)}{٢}$ = (٧ ، ٥)

نقطة د = (٧ ، ٥)

(٧)

م = (٢ ، ٥) ، م = (-٧ ، ٢)

م = ج = (س ، ص)

$\frac{ل_1}{ل_2} = \frac{٣}{-١}$

م = $\frac{ل_1 م_2 + ل_2 م_1}{ل_1 + ل_2}$

م = $\frac{-١(٢ ، ٥) + ٣(-٧ ، ٢)}{-١ + ٣}$

$\therefore$ م = $\frac{(-٢٣ ، ١)}{٢}$ = $(\frac{-٢٣}{٢} ، \frac{١}{٢})$

$\therefore$ نقطة ج = $(\frac{-٢٣}{٢} ، \frac{١}{٢})$

(٨)

بفرض أن (ج) بينهما بين أ ، ب

م١ = (٣ ، -٢) ، م٢ = (-٢ ، ٤)

$\because$ م = ج = (س ، ص)

$\because$ م = $\frac{ل_1 م_2 + ل_2 م_1}{ل_1 + ل_2}$

$\therefore$ (٨ ، -٨) = $\frac{ل_1(٣ ، -٢) + ل_2(-٢ ، ٤)}{ل_1 + ل_2}$

$\therefore$ (٨ ، -٨) = $\frac{(٣ل_1 - ٢ل_2 ، -٢ل_1 + ٤ل_2)}{ل_1 + ل_2}$

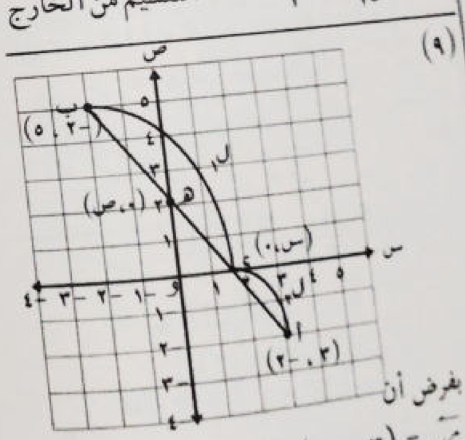
$\therefore$ ٨ = $\frac{٣ل_1 - ٢ل_2}{ل_1 + ل_2}$

$\Leftarrow$ $٨ل_1 + ٨ل_2 = ٣ل_1 - ٢ل_2$

$\therefore$ $٥ل_1 = -١٠ل_2$

$\therefore$ $\frac{ل_1}{ل_2} = -\frac{٢}{١} < ٠$ $\therefore$ التقسيم من الخارج

(٩)



بفرض أن

م١ = (٣ ، -٢) ، م٢ = (-٢ ، ٥)

أولاً : التقاطع مع محور السينات

ويفرض أن نقطة (د) بينهما على اعتبار أن د = (س ، ٠)

$\because$ ص = $\frac{ل_1 ص_2 + ل_2 ص_1}{ل_1 + ل_2}$

$\therefore$ صفر = $\frac{ل_1 \times ٥ + ل_2 \times -٢}{ل_1 + ل_2}$

$\therefore$ $٢ل_2 = ٥ل_1$ $\therefore$ $\frac{ل_1}{ل_2} = \frac{٢}{٥} > ٠$

$\therefore$ النسبة موجبة $\therefore$ التقسيم من الداخل

كما هو واضح من الرسم

والنسبة ل٢ : ل١ = ٢ : ٥

$\therefore$ س = $\frac{٥ \times ٣ + ٢ \times -٢}{٢ + ٥} = \frac{١١}{٧}$

$\therefore$ د = $(\frac{١١}{٧} ، ٠)$

ثانياً : التقاطع مع محور الصادات

ويفرض أن نقطة (هـ) بينهما على اعتبار أن د = (٠ ، ص)

$\therefore$ س = $\frac{ل_1 \times ٣ + ل_2 \times -٢}{ل_1 + ل_2}$

$\therefore$ صفر = $٣ل_1 - ٢ل_2$

$\therefore$ $\frac{ل_2}{ل_1} = \frac{٣}{٢} > ٠$ $\therefore$ النسبة موجبة

$\therefore$ التقسيم من الداخل أيضاً

، والنسبة ل٢ : ل١ = ٣ : ٢

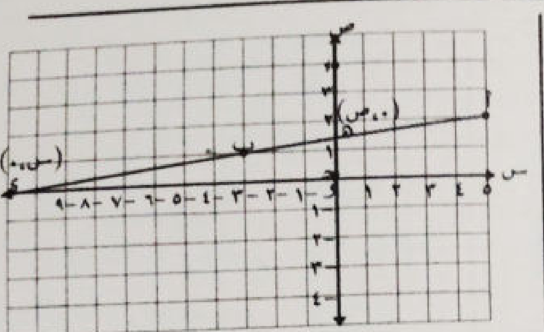
$\therefore$ ص = $\frac{٢ \times -٢ + ٣ \times ٥}{٢ + ٣} = \frac{١١}{٥}$

$\therefore$ هـ = $(٠ ، \frac{١١}{٥})$

(١٠) أولاً : التقاطع مع محور السينات

ويفرض أن نقطة (د) = (س ، ٠) وهي من الداخل تقسم $\overline{أ ب}$

$\because$ ص = $\frac{ل_1 ص_2 + ل_2 ص_1}{ل_1 + ل_2}$



$\therefore$ صفر = $\frac{ل_1 \times ٢ + ل_2 \times ١}{ل_1 + ل_2}$

$\therefore$ $٢ل_1 = -ل_2$ $\therefore$ $\frac{ل_2}{ل_1} = \frac{٢}{-١} < ٠$

$\therefore$ النسبة سالبة $\therefore$ التقسيم من الخارج

$\therefore$ س = $\frac{-١ \times ٥ + ٢ \times -٣}{-١ + ٢}$

= $\frac{-٥ - ٦}{١}$ = -١١

$\therefore$ د = (-١١ ، ٠)

ثانياً : التقاطع مع محور الصادات

ويفرض أن نقطة هـ (٠ ، ص) تقع على محور الصادات وتقع بينهما .

$\because$ س = $\frac{ل_1 س_2 + ل_2 س_1}{ل_1 + ل_2}$

$\therefore$ صفر = $\frac{ل_1 \times ٥ + ل_2 \times -٣}{ل_1 + ل_2}$

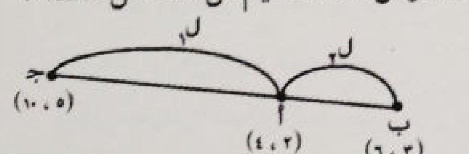
$\therefore$ $٥ل_1 = ٣ل_2$ $\therefore$ $\frac{ل_2}{ل_1} = \frac{٥}{٣} > ٠$

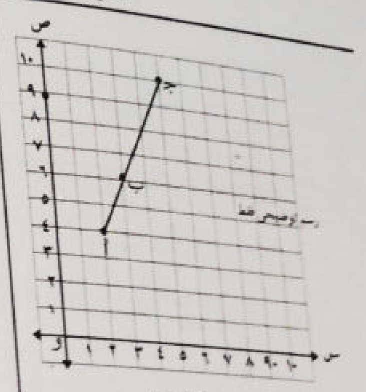
$\therefore$ النسبة موجبة $\therefore$ التقسيم من الداخل

$\therefore$ ص = $\frac{٣ \times ٢ + ٥ \times ١}{٣ + ٥} = \frac{١١}{٨}$

$\therefore$ هـ = $(٠ ، \frac{١١}{٨})$

(١١) بفرض أن التقسيم من الداخل هكذا :





∵ س = (ل١س٢ + ل٢س١)/(ل١ + ل٢)

∴ ٢ = (ل١ × ٣ + ل٢ × ٥)/(ل١ + ل٢)

∴ ٢ل١ + ٢ل٢ = ٣ل١ + ٥ل٢

∴ -ل١ = ٣ل٢ ∴ ل٢/ل١ = ١/-٣ < ٠

∵ النسبة سالبة ∴ التقسيم من الخارج

بنسبة ١ : ٣ من جهة نقطة (ب)

ثانياً : بفرض أن التقسيم من الداخل

∵ س = (ل١س٢ + ل٢س١)/(ل١ + ل٢)

∴ ٣ = (ل١ × ٥ + ل٢ × ٢)/(ل١ + ل٢)

∴ ٣ل١ + ٣ل٢ = ٥ل١ + ٢ل٢

∴ ل٢ = ٢ل١ ∴ ل٢/ل١ = ٢/١ > ٠

∵ النسبة موجبة ∴ التقسيم من الداخل

بنسبة ٢ : ١ من جهة نقطة (جـ)

ثالثاً : بفرض الشكل كما يلي :

∴ ٥ = س = (ل١ × ٢ + ل٢ × ٣)/(ل١ + ل٢)

∴ ٥ل١ + ٥ل٢ = ٢ل١ + ٣ل٢

∴ ٣ل١ = -٢ل٢ ∴ ل٢/ل١ = ٣/-٢ < ٠

∵ النسبة سالبة ∴ التقسيم من الخارج

كما هو واضح فى الرسم التوضيحى الأول

ونسبة ل٢ : ل١ = ٣ : ٢ من جهة نقطة (أ)

(١٢) نقطة تلاقى المتوسطات =

((س١ + س٢ + س٣)/٣ ، (ص١ + ص٢ + ص٣)/٣)

= ((-٤ + ١ + ١)/٣ ، (٢ + -٢ + ٦)/٣)

= (-٢/٣ ، ٢)

(١٣)

بفرض أن جـ تقع بين أ ، ب

يعنى بفرض أن التقسيم من الداخل

∵ س = (ل١س٢ + ل٢س١)/(ل١ + ل٢)

∴ ٧ = (ل١ × ٣ + ل٢ × -٥)/(ل١ + ل٢)

∴ ٧ل١ + ٧ل٢ = ٣ل١ - ٥ل٢

∴ ١٢ل٢ = -٤ل١ ∴ ل٢/ل١ = ١/-٣ < ٠

∵ النسبة سالبة ∴ التقسيم من الخارج

بنسبة ١ : ٣ من جهة نقطة (ب)

∴ قيمة (ص) =

∴ ص = (... + ٤ × -٣)/(-٣ + ١)

= -١٠/-٢ = ٥

∴ نقطة جـ = (٧ ، ٥)

إرشادات تمارين (٢) مراجعة على معادلة الخط المستقيم

(١) [أ] الميل = (٥ - ٢)/(-٢ - ٣) = ٣/-٥ = -٣/٥

[ب] الميل = (-١ - ٠)/(٢ - ٤) = -١/-٢ = ١/٢

[جـ] الميل = (-٣ + ١)/(٣ - ٧) = -٢/-٤ = ١/٢

[د] الميل = (٣ + ٣)/(-١ + ٥) = ٦/٤ = ٣/٢

(٢) شرط التوازى : م١ = م٢ ∴ أ = ٢

(٣) ميل المستقيم الأول = أ ،

ميل المستقيم الثانى = (٤ - ٢)/(٢ - ٣) = ٢/-١ = -٢

∴ أ = -٢

(٤) ص = ٤س + ٧

(٥) م = ظا ٤٥° = ١

∴ معادلة المستقيم : ص = س - ٣

(٦) ص = ٤س + جـ

ويمر بالنقطة (٣ ، ٦) ∴ يحققه

∴ ٦ = ٤ × ٣ + جـ ∴ جـ = -٦

∴ المعادلة : ص = ٤س - ٦

(٧) ميل المستقيم = (٥ + ٣)/(-٣ - ٥) = -١

∴ معادلة المستقيم : ص = -س + جـ

أى نقطة من النقطتين تحقق المعادلة

∴ -٣ = -٥ + جـ ∴ جـ = ٢

∴ ص = -س + ٢

معامل ص

أ، ٣ص = ٢س + ٨ بالقسمة على ٣

∴ ص = ٢/٣ س + ٨/٣ ∴ الميل = ٢/٣

[ب] الميل = -أ/ب = -٤/٥

أ، ٥ص = -٤س + ٢

∴ ص = -٤/٥ س + ٢/٥ ∴ م = -٤/٥

[جـ] م = ٨ ∵ ص - ٨س = ٠

∴ الميل = (- × -٨)/١ = ٨

[د] م = صفر أ، ص - ٥ = ٠

∴ الميل = (- × ٠)/١ = صفر

[هـ] م عندما س - ٦ = ٠

∴ الميل = (-معامل س)/(معامل ص) = -١/٠

∴ الميل غير معرّف

(٩) ∵ ظا هـ = ٠,٧٥ ∴ م = ٣/٤

∵ ميل المستقيم = -أ/-٤ = أ/٤

∴ ٣/٤ = أ/٤ ∴ أ = ٣

إرشادات تمارين (٣) على معادلة الخط المستقيم المتجهة

(١) ر→ = (٢ ، -٣) + ك(٢ ، -١) المتجهة

س = ٢ + ٢ك ، ص = -٣ - ك الوسيطيتان

(س - ٢)/٢ = (ص + ٣)/-١ ،

∴ -س + ٢ = ٢ص + ٨

∴ ٢ص + س + ٤ = ٠

المعادلة الكارتيزية أو الصورة العامة

(٢) م = ظا ٤٥° = ١

∴ المعادلة الكارتيزية بدلالة نقطة وميل

$\frac{\text{ص} + ٤}{\text{س} - ٣} = ١$ ∴ س − ٣ = ص + ٤

∴ ص − س + ٧ = ٠

(٣) [أ] متجه اتجاه ى = (٣ ، ١) − (٦ ، ٤)

= (−٣ ، −٣)

∴ ر = (٣ ، ١) + ك(−٣ ، −٣)

∴ س = ٣ − ٣ك

، ص = ١ − ٣ك الوسيطيتان

∴ $\frac{\text{س} - ٣}{-٣} = \frac{\text{ص} - ١}{-٣}$

∴ −٣س + ٩ = −٣ص + ٣

∴ ٣س − ٣ص − ٦ = ٠ الكارتيزية

[ب] ى = (أ ، ٠) − (٠ ، ب) = (أ ، −ب)

∴ ر = (أ ، ٠) + ك(أ ، −ب) المتجهة

∴ س = أ + ك أ ، ص = −ب ك

الوسيطيتان

∴ $\frac{\text{س} - \text{أ}}{\text{أ}} = \frac{\text{ص}}{-\text{ب}}$

−ب س + أ ب = أ ص

∴ أ ص + ب س − أ ب = ٠ الكارتيزية

[جـ] متجه اتجاه = (٢ ، ٣) − (٥ ، ٣)

= (−٣ ، ٠)

∴ المعادلة المتجهة هي :

ر = (٢ ، ٣) + ك(−٣ ، ٠)

الوسيطيتان : س = ٢ − ٣ك

، ص = ٣

∴ المعادلة الكارتيزية هي : ص = ٣

وهى توازى محور السينات

[د] متجه الاتجاه = (١ ، ١) − (١ ، −٢)

= (٠ ، ٣)

∴ ر = (١ ، ١) + ك(٠ ، ٣) المتجهة

∴ س = ١ ، ص = ١ + ٣ك الوسيطيتان

∴ المعادلة فى الصورة العامة : س = ١

وهى توازى محور الصادات .

(٤) ى = أب = ب − أ

= (٢ ، ٤) − (١ ، ٣)

ى = (١ ، ١) ∴ م = $\frac{١}{١}$ = ١

∴ $\frac{\text{ص} - ٣}{\text{س} - ٢} = ١$ ∴ ص − ٣ = س − ٢

∴ ص − س − ١ = ٠ الصورة العامة

(٥) ر = (٣ ، ١) − (٥ ، ١) = (−٢ ، ٠)

∴ م = $\frac{٠}{-٢}$ = صفر

∴ المستقيم يوازى محور السينات

ويمر بالنقطة (−١ ، ٣)

∴ معادلة المستقيم : ص = ٣

(٦) يوازى محور السينات

∴ متجه اتجاه أى مستقيم يوازى محور السينات = (أ ، ٠) حيث أ ∈ ح

∴ ر = (٥ ، ٦) + ك(أ ، ٠)

(٧) ى (متجه اتجاه المستقيم)

= (٤ ، ٢) − (٠ ، ٠) = (٤ ، ٢)

∴ ر = (٠ ، ٠) + ك(٤ ، ٢)

أ ، ر = (٤ ، ٢) + ك(٤ ، ٢)

ملحوظة : الحل ليس وحيد

(٨) م = $\frac{١}{٢}$ ∴ ى = (٢ ، ١)

∴ المعادلة المتجهة

∴ ر = (٢ ، −١) + ك(٢ ، ١)

(٩) ميل المستقيم = $\frac{-١}{٢}$

∴ معادلة المستقيم = $\frac{\text{ص} + ٥}{\text{س} - ٣} = \frac{-١}{٢}$

٢ص + ١٠ = −س + ٣

٢ص + س + ٧ = ٠

(١٠) $\frac{\text{ص} + ٣}{\text{س} - ٢} = \frac{٢}{١}$

∴ ص + ٣ = ٢س − ٤

∴ ص − ٢س + ٧ = ٠

∴ (أ ، ٧) يمر بالمستقيم ∴ يحققه

∴ ٧ − ٢أ + ٧ = ٠

∴ ٢أ = ١٤ ∴ أ = ٧

∴ (٥ ، ب) يمر بالمستقيم ∴ يحققه

∴ ب − ٢ × ٥ + ٧ = ٠ ∴ ب = ٣

(١١) لاحظ أن :

س = ٣ − ٢ك ، ص = −١ + ٣ك

هى : ر = (٣ ، −١) + ك(−٢ ، ٣)

∴ متجه الاتجاه هو (−٢ ، ٣)

وهو يوازى المستقيم المطلوب :

∴ $\text{م}_١ = \text{م}_٢$

∴ متجه اتجاه المطلوب = (−٢ ، ٣)

∴ ر = (١ ، −١) + ك(−٢ ، ٣) المتجهة

∴ س = ١ − ٢ك ، ص = −١ + ٣ك

الوسيطيتان

∴ $\frac{\text{س} - ١}{-٢} = \frac{\text{ص} + ١}{٣}$

∴ ٣س − ٣ = −٢ص − ٢

∴ ٣س + ٢ص − ١ = ٠

(١٢) إذا كان المستقيم يوازى محور الصادات

∴ متجه الاتجاه هو (٠ ، ب)

∴ المعادلات :

∴ ر = $(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)$ + ك(٠ ، ب) المتجهة

، س = $\text{س}_١$ ، ص = $\text{ص}_١$ + ب ك

الوسيطيتان

∴ المعادلة الكارتيزية : س = $\text{س}_١$

ثانيًا : إذا كان يوازى محور السينات

∴ متجه الاتجاه هو (أ ، ٠)

∴ المعادلات :

ر = $(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)$ + ك(أ ، ٠) المتجهة

، س = $\text{س}_١$ + ك أ ، ص = $\text{ص}_١$

الوسيطيتان

∴ المعادلة الكارتيزية : ص = $\text{ص}_١$

ثالثًا : يمر بنقطة الأصل

∴ ر = (٠ ، ٠) + ك(أ ، ب) المتجهة

∴ س = ك أ ، ص = ك ب الوسيطيتان

∴ $\frac{\text{س}}{\text{أ}} = \frac{\text{ص}}{\text{ب}}$

∴ ب س − أ ص = ٠ الكارتيزية

إرشادات تمارين (٤)
على متجه اتجاه العمود للمستقيم ...

(١) المتجه العمودى (−١ ، ٢)

∴ متجه اتجاه المستقيم المطلوب

= (٢ ، ١)

∴ ر = (٢ ، −٣) + ك(٢ ، ١) المتجهة

∴ س = ٢ + ٢ك ، ص = −٣ + ك

الوسيطيتان

، $\frac{\text{س} - ٢}{٢} = \frac{\text{ص} + ٣}{١}$

∴ س − ٢ = ٢ص + ٦

∴ س − ٢ص − ٨ = ٠ الكارتيزية

(٢) ميل المستقيم المعطى هو م = $\frac{-١}{١}$ = −١

∴ متجه اتجاه المعطى (١ ، −١)

∴ متجه اتجاه المستقيم المطلوب = (١ ، ١)

∴ المعادلات :

ر = (٢ ، −١) + ك(١ ، ١) المتجهة

∴ س = ٢ + ك ، ص = −١ + ك الوسيطيتان

، $\frac{س - ٢}{١} = \frac{ص + ١}{١}$

∴ س − ص − ٣ = ٠ الكارتيزية

(٣) متجه اتجاه المستقيم المعطى (٤ ، ٣)

∴ متجه اتجاه المستقيم المطلوب = (٣ ، −٤)

∴ المعادلات :

$\vec{ر}$ = (٥ ، ٧) + ك(٣ ، −٤) المتجهة

∴ س = ٥ + ٣ك ، ص = ٧ − ٤ك

الوسيطيتان

، $\frac{س - ٥}{٣} = \frac{ص - ٧}{-٤}$

∴ ٣ص − ٢١ = −٤س + ٢٠

∴ ٤س + ٣ص − ٤١ = ٠ الكارتيزية

(٤) متجه اتجاه المستقيم المطلوب = (٢ ، ٧)

∴ المعادلات :

$\vec{ر}$ = (٠ ، ٠) + ك(٢ ، ٧) المتجهة

∴ س = ٢ك ، ص = ٧ك الوسيطيتان

، $\frac{س}{٢} = \frac{ص}{٧}$

∴ ٧س − ٢ص = ٠ الكارتيزية

$\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ١$ بالضرب × ٦

∴ ٣س + ٢ص − ٦ = ٠

∴ $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{-٤} = ١$ بالضرب × ١٢

∴ ٤س − ٣ص − ١٢ = ٠

[أ] بالقسمة على ٩

∴ $\frac{٢س}{٩} - \frac{٥ص}{٩} = ١$

∴ $\frac{س}{\frac{٩}{٢}} + \frac{ص}{\frac{-٩}{٥}} = ١$

∴ الجزءان هما $\frac{٩}{٢}$ ، $\frac{-٩}{٥}$

[ب] بالقسمة على ٨

∴ $\frac{٢س}{٨} - \frac{٥ص}{٨} = ١$

∴ $\frac{س}{٤} + \frac{ص}{\frac{-٨}{٥}} = ١$

∴ الجزءان هما ٤ ، $\frac{-٨}{٥}$

[جـ] ∵ ٢س − ص = ٠

∴ المعادلة لا تقطع المحورين إلا فى نقطة الأصل ، الجزءان صفر ، صفر

[د] ∵ ص = ٣ ، $\frac{ص}{٣} = ١$

∴ الجزء المقطوع من محور السينات = صفر

∴ الجزء المقطوع من محور الصادات = ٣

∴ المستقيم يوازى محور السينات .

[هـ] $\frac{س}{٢} = ١$

∴ الجزء المقطوع من محور السينات = ٢ ، والجزء المقطوع من محور الصادات = صفر

∴ المستقيم يوازى محور الصادات .

(٨) $\frac{س}{٤} + \frac{ص}{-٥} = ١$ بالضرب × ٢٠

∴ ٥س − ٤ص − ٢٠ = ٠

إرشادات تمارين (٥) على قياس الزاوية الحادة بين مستقيمين

(١) المستقيم الأول متجه الاتجاه = (−٢ ، ١)

∴ $م_١ = \frac{-١}{٢}$ ، $م_٢ = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

∴ طا هـ = $\left|\frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢}\right|$

$= \left|\frac{\frac{-١}{٢} - \frac{١}{٢}}{١ + \frac{-١}{٢} \times \frac{١}{٢}}\right|$

∴ طا هـ = ... = $\frac{٤}{٣}$

∴ ق(هـ) = ٥٣° ٧َ ٤٨ً

∴ $م_١ = \frac{-٤}{٥}$ ، $م_٢ = \frac{-٢}{-٣} = \frac{٢}{٣}$

∴ طا هـ = $\left|\frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢}\right|$

$= \left|\frac{\frac{-٤}{٥} - \frac{٢}{٣}}{١ + \frac{-٤}{٥} \times \frac{٢}{٣}}\right| = \left|\frac{\frac{-٢٢}{١٥}}{\frac{٧}{١٥}}\right|$

∴ طا هـ = $\frac{٢٢}{٧}$

∴ ق(هـ) = ٧٢° ٢٠َ ٥٩ً

(٢) ∴ $م_١ = \frac{١}{٢}$ ، $م_٢ = -\frac{١}{٣}$

∴ طا هـ = $\left|\frac{\frac{١}{٢} + \frac{١}{٣}}{١ + \frac{١}{٢} \times -\frac{١}{٣}}\right| = ١$

∴ ق(هـ) = ٤٥°

(٤) ∴ $م_١ = \frac{-٣}{٤}$ ، $م_٢ = \frac{١}{٤}$

∴ طا هـ = $\left|\frac{\frac{-٣}{٤} - \frac{١}{٤}}{١ + \frac{-٣}{٤} \times \frac{١}{٤}}\right| = \frac{١٦}{١٣}$

∴ ق(هـ) = ٥٠° ٥٤َ ٢٢ً

(٥) ∴ $م_١ = -\frac{١}{٢}$ ، $م_٢ = \frac{٢}{٣}$

∴ طا θ = $\left|\frac{\frac{-١}{٢} - \frac{٢}{٣}}{١ + \frac{-١}{٢} \times \frac{٢}{٣}}\right| = \frac{\frac{٧}{٦}}{\frac{٢}{٣}}$

∴ طا θ = $\frac{٧}{٤}$ ∴ ق(θ) = ٦٠° ١٥َ ١٨ً

(٦) $م_١ = -١$ ، م محور السينات = صفر

∴ طا هـ = $\left|\frac{-١ - ٠}{١ + ٠}\right| = ١$

∴ ق(هـ) = ٤٥°

∴ طا هـ = $\left|\frac{٣ + ٣}{١ + ٣ \times -٣}\right| = \left|\frac{٦}{-٨}\right| = \frac{٣}{٤}$

∴ ق(هـ) = ٣٦° ٥٢َ ١١ً

(٨)

∵ (ب جـ)² = (٣ + ٢)² + (١ + ١)²

∴ (ب جـ)² = ٢٥ + ٤ = ٢٩

∴ (أ ب)² = (٣ − ٠)² + (١ − ٢)²

= ٩ + ١ = ١٠

∴ (أ جـ)² = (٢)² + (٣)²

= ٤ + ٩ = ١٣

∴∴ (ب جـ)² > (أ ب)² + (أ جـ)²

∴ أ زاوية منفرجة

ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{٢ - ١}{٠ - ٣} = \frac{-١}{٣}$

ميل $\overleftrightarrow{أجـ} = \frac{٢ + ١}{٠ - -٢} = \frac{٣}{٢}$

∴ طا أ = $\frac{\frac{-١}{٣} - \frac{٣}{٢}}{١ + \frac{-١}{٣} \times \frac{٣}{٢}} = \frac{\frac{-١١}{٦}}{\frac{١}{٢}}$

∴ طا أ = $\frac{-١١}{٣}$

∴ ق(أ) = ١٠٥° ١٥َ ١٨ً

(٩) ميل المستقيم الواصل بين النقطتين

م = $\frac{١ - ٠}{٠ + ١} = ١$

∴ طا هـ = ١ ∴ ق(هـ) = ٤٥°

(١٠) ∴ $م_١ = \frac{٣}{٣} = ١$ ، $م_٢ = ٢$

$\therefore$ ظا ق $= \left|\frac{١ - ٢}{١ + ١ \times ٢}\right| = \frac{١}{٣}$

$\therefore$ ق$(\hat{ق}) = ١٨° \; ٣٦' \; ٥''$

(١١) $\because$ ظا $\frac{\pi}{٤} = ١$ ، $م_١ = \frac{-١}{ك}$ ، $م_٢ = \frac{٣}{٥}$

$\therefore ١ = \left|\frac{\frac{-١}{ك} - \frac{٣}{٥}}{١ + \frac{-١}{ك} \times \frac{٣}{٥}}\right| = \left|\frac{\frac{-١}{ك} - \frac{٣}{٥}}{١ - \frac{٣}{٥ك}}\right|$

$\therefore \pm ١ = \frac{\frac{-١}{ك} - \frac{٣}{٥}}{١ - \frac{٣}{٥ك}}$

عندما : $١ = \frac{\frac{-١}{ك} - \frac{٣}{٥}}{١ - \frac{٣}{٥ك}}$

$\therefore ١ - \frac{٣}{٥ك} = \frac{-١}{ك} - \frac{٣}{٥}$

$\therefore \frac{١}{ك}\left(١ - \frac{٣}{٥}\right) = \frac{-٨}{٥}$

$\therefore \frac{١}{ك} \times \frac{٢}{٥} = \frac{-٨}{٥} \qquad \therefore ك = \frac{-١}{٤}$

عندما : $-١ = \frac{\frac{-١}{ك} - \frac{٣}{٥}}{١ - \frac{٣}{٥ك}}$

$\therefore -١ + \frac{٣}{٥ك} = \frac{١}{ك} + \frac{٣}{٥}$

$\therefore \frac{١}{ك}\left(١ + \frac{٣}{٥}\right) = ١ - \frac{٣}{٥}$

$\therefore \frac{١}{ك} \times \frac{٨}{٥} = \frac{٢}{٥} \qquad \therefore ك = ٤$

(١٢) $م_١ = \frac{-١}{ك}$ ، $م_٢ = \frac{٢}{١} = ٢$ ، $\because$ ظا $٤٥° = ١$

$\therefore ١ = \left|\frac{\frac{-١}{ك} - ٢}{١ + \frac{-١}{ك} \times ٢}\right| = \left|\frac{\frac{-١}{ك} - ٢}{١ - \frac{٢}{ك}}\right|$

$\therefore \pm ١ = \frac{\frac{-١}{ك} - ٢}{١ - \frac{٢}{ك}}$

عندما : $١ = \frac{\frac{-١}{ك} - ٢}{١ - \frac{٢}{ك}}$

$\therefore ١ - \frac{٢}{ك} = \frac{-١}{ك} - ٢$

$\therefore \frac{٢}{ك} - \frac{١}{ك} = ٣ \qquad \therefore \frac{١}{ك} = ٣ \qquad \therefore ك = \frac{١}{٣}$

عندما : $-١ = \frac{\frac{-١}{ك} - ٢}{١ - \frac{٢}{ك}}$

$\therefore -١ + \frac{٢}{ك} = \frac{١}{ك} + ٢$

$\therefore \frac{٣}{ك} = ١ \qquad \therefore ك = ٣$

(١٣) أ $(٠ ، ١)$ ، ب $(٥ ، ٧)$ ، ج $(١ ، ص)$

قائم في (ب)

$\therefore$ ميل $\overline{أب} \times$ ميل $\overline{بج} = -١$

$\therefore \frac{٧ - ٣}{٥ - ٢} \times \frac{ص - ٧}{١ - ٥} = -١$

$\therefore \frac{٤}{٣} \times \frac{ص - ٧}{-٤} = -١$

$\therefore ص - ٧ = ٣ \qquad \therefore ص = ١٠$

ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{٤}{٣}$ ، ميل $\overleftrightarrow{بج} = \frac{-٣}{٤}$

$\therefore$ ميل $\overleftrightarrow{أج} = \frac{١٠ - ٣}{١ - ٢} = -٧$

$\therefore$ ظا$(\hat{أ}) = \left|\frac{\frac{٤}{٣} + ٧}{١ + \frac{٤}{٣} \times -٧}\right| = \frac{\frac{٢٥}{٣}}{\frac{٢٥}{٣}} = ١$

$\therefore$ ق$(\hat{أ}) = ٤٥°$

$\therefore$ ق$(\hat{ج}) = ٤٥°$ للتأكيد

$\therefore$ ظا$(\hat{ج}) = \left|\frac{-\frac{٤}{٣} + ٧}{١ - \frac{٤}{٣} \times -٧}\right| = \frac{\frac{٢٥}{٤}}{\frac{٢٥}{٤}} = ١$

$\therefore$ ق$(\hat{ج}) = ٤٥°$

إجابات تمارين (٦) على طول العمود المرسوم من نقطة على خط مستقيم

(١) $\therefore$ طول العمود $= \frac{|٣ \times -٣ - ٤ \times ٢ + ٢|}{\sqrt{٩ + ١٦}}$

$= \frac{١٥}{٥} = ٣$ وحدة طول

(٢) $\therefore$ طول العمود $= \frac{|٤ \times ١ - ٣ \times -٢|}{\sqrt{١٦ + ٩}}$

$= \frac{١٠}{٥} = ٢$ وحدة طول

(٣) $\therefore$ طول العمود $= \frac{|٥ \times ١ + ١٢ \times ١ - ٦|}{\sqrt{٢٥ + ١٤٤}}$

$= \frac{١١}{١٣}$ وحدة طول

(٤) $\frac{|٢ - ٣|}{\sqrt{١}} = ١$ وحدة طول

(٥) $\frac{|-٤ - ٣|}{\sqrt{١}} = ٧$ وحدة طول

(٦) $\therefore$ س $= ٤$ك ، ص $= ٢ + ٣$ك

$\therefore \frac{س}{٤} = \frac{ص - ٢}{٣}$

$\therefore ٣س = ٤ص - ٨$

$\therefore ٣س - ٤ص + ٨ = ٠$

$\therefore$ طول العمود $= \frac{|٣ \times ٤ - ٤ \times -٥ + ٨|}{\sqrt{٩ + ١٦}}$

$= \frac{٤٠}{٥} = ٨$ وحدة طول

(٧) س $= ٢ + ٥$ك ، ص $= ٥ + ١٢$ك

$\therefore \frac{س - ٢}{٥} = \frac{ص - ٥}{١٢}$

$\therefore ١٢س - ٢٤ = ٥ص - ٢٥$

$\therefore ١٢س - ٥ص + ١ = ٠$

$\therefore$ طول العمود $= \frac{|١٢ \times ٢ - ٥ \times ٠ + ١|}{\sqrt{١٤٤ + ٢٥}}$

$= \frac{٢٥}{١٣}$ وحدة طول

(٨) نوجد معادلة الخط المستقيم المار

بالنقطتين $(٠ ، -٣)$ ، $(٤ ، ٠)$

$\frac{س}{٤} + \frac{ص}{-٣} = ١$ بالضرب × ١٢

$\therefore ٣س - ٤ص - ١٢ = ٠$

$\therefore$ طول العمود $= \frac{|٣ \times ٥ - ٤ \times ٢ - ١٢|}{\sqrt{٩ + ١٦}}$

$= \frac{٥}{٥} = ١$ وحدة طول

(٩) معادلة المستقيم : $\frac{ص - ٣}{س + ٣} = \frac{-٣}{٤}$

$\therefore ٤ص - ١٢ = -٣س - ٩$

$\therefore ٤ص + ٣س - ٣ = ٠$

$\therefore$ طول العمود $= \frac{|٤ \times ٠ + ٣ \times ٠ - ٣|}{\sqrt{١٦ + ٩}}$

$= \frac{٣}{٥}$ وحدة طول

(١٠) معادلة المستقيم : $\frac{ص - ١}{س - ٣} = \frac{٥}{١٢}$

$\therefore ١٢ص - ١٢ = ٥س - ١٥$

$\therefore ٥س - ١٢ص - ٣ = ٠$

$\therefore$ طول العمود $= \frac{|٥ \times ٤ - ١٢ \times -٢ - ٣|}{\sqrt{٢٥ + ١٤٤}}$

$= \frac{٤١}{١٣}$ وحدة طول

(١١) نوجد معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{بج}$ بدلالة النقطتين

$\therefore \frac{ص - ٣}{س - ٢} = \frac{٦ - ٣}{-٢ - ٢} = \frac{-٣}{٤}$

$\therefore ٤ص - ١٢ = -٣س + ٦$

$\therefore ٤ص + ٣س - ١٨ = ٠$

$\therefore$ طول العمود $= \frac{|٣ \times ٤ + ٤ \times ٦ - ١٨|}{\sqrt{٩ + ١٦}}$

$= \frac{١٨}{٥} = ٣,٦$ وحدة طول

(١٢) $م_١ = \frac{-٥}{١٢}$ ، $م_٢ = \frac{-١٠}{٢٤} = -\frac{٥}{١٢}$

$\because م_١ = م_٢ \quad \therefore$ المستقيمان متوازيان

بفرض أن نقطة على المستقيم الأول

∴ النقطة (٠ ، ٣/٤)

∴ طول العمود = |١٠×٠ + ٢٤ × ٣/٤ + ٩| / √(١٠٠ + ٥٧٦)

= ٢٧/٢٦ وحدة طول

(١٣) م١ = −٣/٤ ، م٢ = −٦/٨ = −٣/٤

∵ م١ = م٢ ∴ المستقيمان متوازيان

نفرض أى نقطة على المستقيم ولتكن على المستقيم الأول .

س = ٠ ، ص = ٥/٤

∴ النقطة (٠ ، ٥/٤)

∴ طول العمود = |٦×٠ + ٨ × ٥/٤ + ١٠| / √(٣٦ + ٦٤)

= ٢٠/١٠ = ٢ وحدة طول

(١٤) ل = |٢×١ + ء + ٤| / √(٤ + ١) = ٢√٥

∴ √٥ × ٢√٥ = |٦ + ء|

∴ ١٠ = |٦ + ء| ∴ ١٠ = ±(٦ + ء)

∴ ١٠ = ٦ + ء ∴ ء = ٤

، عندما ١٠ = −٦ − ء ∴ ء = −١٦

(١٥)

∵ أء // بجـ

∴ ميل أء = ميل بجـ

∴ (ص − ١)/(٤ − ٢) = (١ − ٣)/(٩ − ٥)

∴ (ص − ١)/٢ = −٢/١

∴ ص − ١ = −٤ ∴ ص = −٣

∴ طول أء = √((٤ − ٢)² + (−٣ − ١)²)

= √(٤ + ١٦) = √٢٠

= ٢√٥ وحدة طول

طول بجـ = √((٥ − ٦)² + (٣ − ١)²)

= √(١ + ٤) = √٥ وحدة

إيجاد معادلة بجـ وإيجاد طول العمود من أ إلى المستقيم بجـ

∴ إيجاد معادلة المستقيم بجـ

∴ (ص − ١)/(س − ٦) = (٣ − ١)/(٥ − ٦) = ٢/−١

∴ −ص + ١ = ٢س − ١٢

∴ ٢س + ص − ١٣ = ٠

∴ طول العمود من أ إلى بجـ

= |٢×٢ + ١ − ١٣| / √(٤ + ١)

∴ طول العمود = ٨/√٥ = ٨√٥/٥ وحدة طول

∴ مساحة شبه المنحرف = ١/٢ (مجموع القاعدتين المتوازيين) × الارتفاع

= ١/٢ × (٢√٥ + √٥) × ٨√٥/٥

= ١٢ وحدة مربعة

إرشادات تمارين (٧) على المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين

(١) ∵ (س − ٤ص + ٥) + ك(س + ٧ص − ١٧) = ٠

عوض عن النقطة س = ٤ ، ص = ٢

∴ (٤ − ٨ + ٥) + ك(٤ + ١٤ − ١٧) = ٠

∴ ١ + ك = ٠ ∴ ك = −١

∴ (س − ٤ص + ٥) − (س + ٧ص − ١٧) = ٠

∴ −١١ص + ٢٢ = ٠ ∴ ص = ٢

(٢) ٣س − ٢ص + ٢٥ + ك(٢ص + ٥س − ٢٣) = ٠

عوض عن س = ٢ ، ... (−٦ + ٢ + ٢٥) + ك(٢ + ١٠ − ٢٣) = ٠

∴ ٢٩ − ١١ك = ٠ ∴ ١١ك = ٢٩

ك = ٢٩/١١

٣س − ٢ص + ٢٥ + ٢٩/١١ (٢ص + ٥س − ٢٣) = ٠

∴ ٣٣س − ٢٢ص + ٢٧٥ + ٢٩(٢ص + ٥س − ٢٣) = ٠

∴ ٣٣س − ٢٢ص + ٢٧٥ + ٥٨ص + ١٤٥س − ٦٦٧ = ٠

∴ ١٧٨س + ٣٦ص − ٣٩٢ = ٠

∴ ٨٩س + ١٨ص − ١٩٦ = ٠

(٣) ∵ (س ، ص) = (−٢ ، ٠) + ك(٣ ، ٢)

∴ س = −٢ + ٣ك ، ص = ٢ك

∴ (س + ٢)/٣ = ص/٢

∴ ٢س + ٤ = ٣ص

∴ ٢س − ٣ص + ٤ = ٠

∴ المعادلة العامة للمستقيمين معًا

∴ ٣س + ٢ص − ٧ + ك(٢س − ٣ص + ٤) = ٠

عوض عن س = ٣ ، ص = ٤

∴ ٣×٣ + ٢×٤ − ٧ + ك(٢×٣ − ٣×٤ + ٤) = ٠

∴ ١٠ − ٢ك = ٠ ∴ ك = ٥

∴ ٣س + ٢ص − ٧ + ٥(٢س − ٣ص + ٤) = ٠

∴ ١٣س − ١٣ص + ١٣ = ٠

∴ س − ص + ١ = ٠

∴ ك = س/−٢ = ص/٢

∴ ٢س = −٢ص ∴ ٢س + ٢ص = ٠

∴ س + ص = ٠

إيجاد نقطة التقاطع

∴ س = −ص عوض فى المعادلة الثانية

∴ −٣ص − ٢ص = ١٣ ∴ −٥ص = ١٣

∴ ص = −١٣/٥ ، س = ١٣/٥

∴ النقطة (١٣/٥ ، −١٣/٥)

المستقيم يمر بالنقطة السابقة ويوازى محور الصادات ∴ المعادلة س = ١٣/٥

(٥) ٢ص − س − ٢ + ك(٤ص + ٣س − ٢٤) = ٠ .... (١)

∴ (٣ك − ١)س + (٢ + ٤ك)ص − (٢ + ٢٤ك) = ٠

∴ ميل المستقيم المطلوب = −(٣ك − ١)/(٢ + ٤ك)

∴ ميل المستقيم الثانى = −٣/٤

شرط المسألة : ميل المستقيم المطلوب عمودى على المستقيم الثانى

∴ حاصل ضرب ميلهما = −١

∴ −(٣ك − ١)/(٢ + ٤ك) × −٣/٤ = −١

∴ (٩ك − ٣)/(٨ + ١٦ك) = −١

∴ ٨ + ١٦ك = −٩ك + ٣

∴ ٢٥ك = −٥

∴ ك = −١/٥ بالتعويض فى (١)

∴ ٢ص − س − ٢ − ١/٥(٤ص + ٣س − ٢٤) = ٠

∴ ١٠ص - ٥س - ١٠ - ٤ص - ٣س + ٢٤ = ٠

∴ ٦ص - ٨س + ١٤ = ٠ (÷ ٢)

∴ ٣ص - ٤س + ٧ = ٠

(٦) معادلة المستقيم المطلوب بدلالة (ك) هى:

٣ص - ٢س + ١٥ + ك (٢ص + ٣س - ١٦) = ٠

∴ (٣ + ٢ك) ص + (٣ك - ٢) س

+ ١٥ - ١٦ك = ٠

∴ ميل المستقيم المطلوب = -(٣ك - ٢) / (٣ + ٢ك)

، ميل المستقيم المعلوم = ٣

شرط المسألة : المستقيم المطلوب والمعلوم متوازيان ∴ ميلهما متساويان

∴ -(٣ك - ٢) / (٣ + ٢ك) = ٣ / ١

∴ ٩ + ٦ك = -٣ك + ٢

∴ ٩ك = -٧ ∴ ك = -٧ / ٩

∴ ٣ص - ٢س + ١٥ - ٧/٩ (٢ص + ٣س - ١٦) = ٠

∴ ٢٧ص - ١٨س + ١٣٥ - ١٤ص - ٢١س + ١١٢ = ٠

∴ ١٣ص - ٣٩س - ٢٤٧ = ٠ (÷ ١٣)

∴ ص - ٣س + ١٩ = ٠

الطريقة الثانية : سنجد أن نقطة التقاطع (٦ ، -١) والميل = ٣

(٧) بحل المعادلتين معًا :

٢ص - س + ٢ = ٠

٢ص + س + ١٠ = ٠

بالجمع

٤ص = -١٢ ∴ ص = -٣

∴ س = -٤

∴ نقطة التقاطع (-٤ ، -٣)

، ميل المستقيم المعلوم = -٤ / ٣

∴ ميل المستقيم العمودى عليه = ٣ / ٤

∴ معادلة المستقيم بمعلومية نقطة وميل هى : (ص + ٣) / (س + ٤) = ٣ / ٤

∴ ٤ص + ١٢ = ٣س + ١٢

∴ ٤ص - ٣س = ٠

(٨) نقطة التقاطع (١ ، ٣) والميل ٢/٣

∴ معادلة المستقيم : (ص - ٣) / (س - ١) = ٢ / ٣

∴ ٣ص - ٩ = ٢س - ٢

∴ ٣ص - ٢س - ٧ = ٠

الطريقة الثانية : معادلة المستقيم المطلوب بدلالة (ك)

ص - س - ٢ + ك (٢ص - ٣س - ٣) = ٠ .... (١)

∴ (١ + ٢ك) ص - (١ + ٣ك) س - ٢ - ٣ك = ٠

، ميل المستقيم هو (١ + ٣ك) / (١ + ٢ك)

وهو يساوى الميل المعطى ٢/٣

∴ (١ + ٣ك) / (١ + ٢ك) = ٢ / ٣

∴ ٣ + ٩ك = ٢ + ٤ك

∴ ٥ك = -١ ∴ ك = -١ / ٥

∴ عوض عن ك فى (١)

∴ ص - س - ٢ - ١/٥ (٢ص - ٣س - ٣) = ٠

∴ ٥ص - ٥س - ١٠ - ٢ص + ٣س + ٣ = ٠

∴ ٣س - ٢س - ٧ = ٠ المعادلة المطلوبة

(٩) إذا قمنا بحل المعادلتين :
نجد أن نقطة التقاطع (٤/٥ ، ٣/٥)

والمستقيم موازى لمحور السينات

∴ ص = ٣ / ٥

الطريقة الثانية :

ص - س - ١) + ك (ص - ٢س + ١) = ٠

∴ (١ + ك) ص - (١ + ٢ك) س - ١ + ك = ٠

∴ المستقيم موازى لمحور السينات

∴ الميل = صفر ∴ (١ + ٢ك) / (٣ + ك) = ٠

∴ ١ + ٢ك = ٠ ∴ ك = -١ / ٢

∴ ص - س - ١ - ١/٢ (ص - ٢س + ١) = ٠

∴ ٢ص - ٢س - ٢ - ص + ٢س - ١ = ٠

∴ ٥ص - ٣ = ٠ ∴ ص = ٣ / ٥

(١٠) نقطة التقاطع (-٨/٧ ، ٢٥/٧)

شرط المسألة : س/أ + ص/أ = ١ .... (١)

عوض عن س = -٨/٧ ، ص = ٢٥/٧

∴ أ = ١٧/٧ بالتعويض فى (١)

∴ ٧س/١٧ + ٧ص/١٧ = ١

∴ المعادلة : ٧س + ٧ص - ١٧ = ٠

الطريقة الثانية :

٢س - ٣ص + ١٣ + ك (٢ص + س - ٦) = ٠

(٢ + ك) س + (٢ك - ٣) ص + (١٣ - ٦ك) = ٠

∴ (٢ + ك) س + (٢ك - ٣) ص = (٦ك - ١٣)

بالقسمة على (٦ك - ١٣)

∴ س / ((٦ك - ١٣) / (٢ + ك)) + ص / ((٦ك - ١٣) / (٢ك + ٣)) = ١

شرط المسألة :

الجزءان المقطوعان متساويان

∴ (٦ك - ١٣) / (٢ + ك) = (٦ك - ١٣) / (٢ك + ٣)

∴ ٢ + ك = ٢ك - ٣ ∴ ك = ٥

∴ المعادلة :

٢س - ٣ص + ١٣ + ٥ (٢ص + س - ٦) = ٠

٢س - ٣ص + ١٣ + ١٠ص + ٥س - ٣٠ = ٠

∴ ٧س + ٧ص - ١٧ = ٠

(١١) يصنع مع محور الصادات الموجب زاوية قياسها ١٣٥°

∴ يعمل مع محور السينات الموجب زاوية قياسها ٤٥°

∴ الميل = طا ٤٥° = ١

∵ نقطة التقاطع (٤ ، -٢)

∴ المعادلة : (ص + ٢) / (س - ٤) = ١

∴ المعادلة : ص + ٢ = س - ٤

∴ ص - س + ٦ = ٠

الطريقة الثانية :

(٢س + ٣ص - ٢) + ك (٣س - ص - ١٤) = ٠ .... (١)

∴ (٢ + ٣ك) س + (٣ - ك) ص - ٢ - ١٤ك = ٠

الميل : -(٢ + ٣ك) / (٣ - ك) = ١

∴ ٣ - ك = -٢ - ٣ك ∴ ٢ك = -٥

∴ ك = -٥/٢ بالتعويض فى (١)

∴ ٢س + ٣ص - ٢ - ٥/٢ (٣س - ص - ١٤) = ٠

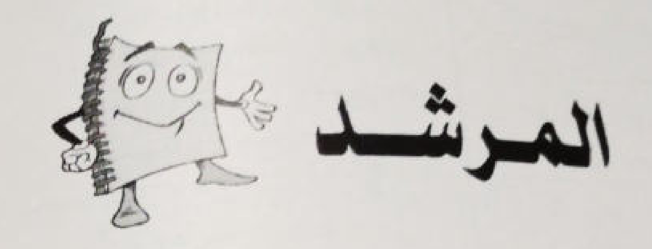
∴ ٤س + ٦ص - ٤ - ١٥س + ٥ص + ٧٠ = ٠

∴ -١١س + ١١ص + ٦٦ = ٠

(بالقسمة على ١١)

∴ ص - س + ٦ = ٠

المرشد



فى الرياضيات

نماذج امتحانات الجبر وحساب المثلثات

للصف الأول الثانوى
الفصل الدراسى الثانى

إعداد
سعيد جودة

امتحانات الصف الأول الثانوى الأزهرى (الفصل الدراسى الثانى) فى الجبر وحساب المثلثات

(١) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة القاهرة الأزهرية) ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

١ **(أ) أكمل ما يأتى :**

(١) مجموعة حل المعادلة : حا θ + $\sqrt{٣}$ حتا θ = صفر حيث $١٨٠^\circ < \theta < ٣٦٠^\circ$ هى ....

(٢) إذا كانت $\begin{pmatrix} ١+ت & ١-ت \\ \text{حا هـ} & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & ء \end{pmatrix}$ حيث $ت^٢ = -١$ ، هـ زاوية حادة وكان أ ب جـ ء = ١ ق($\hat{هـ}$) = ...°

(٣) إذا كانت س = $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ٤ & -٣ \end{pmatrix}$ فإن $س^{-١}$ = ...

(٤) قطاع دائرى طول قطر دائرته ١٢ سم وقياس زاويته المركزية ٦٠° تكون مساحته ≃ .... $سم^٢$

(٥) إذا كان $\begin{vmatrix} أ + \frac{١}{أ} & ١ \\ ١ & أ + \frac{١}{أ} \end{vmatrix} = ١٥$ فإن $أ^٢ + \frac{١}{أ^٢}$ = ...

(ب) حل نظام المتباينات الخطية التالية بيانيًا :

٢ص ≤ ٣س ، -٣س + ٢ص ≤ -٦

(جـ) رصد شخص من قمة جبل ارتفاعه ٢,٥٦ كم نقطة على سطح الأرض فوجد أن قياس زاوية انخفاضها ٦٣° . أوجد المسافة بين النقطة والراصد لأقرب متر .

---

٢ **(أ) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :**

(١) النقطة التى تنتمى إلى مجموعة حل المتباينتين :

٢س + ص < ٤ ، س + ٢ص < ٦ هى ....

(... ، (٢ ، ١) أو (١ ، ٢) أو (٣ ، -١))

(٢) $\begin{pmatrix} ١- & ٣- \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} + ٢\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ١- \end{pmatrix} = \text{..........}$

$\left(\square \text{ ، } \begin{pmatrix} ١ & ١- \\ ١ & ٠ \end{pmatrix} \text{ ، } \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix} \text{ ، } \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix} \right)$

(٣) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان أ + أ^{مد} = I ، فإن :

مجموع عناصر المصفوفة أ = ... (٤ ، ٢ ، ١ ، صفر)

(٤) إذا كان ٣ حا θ + ٤ حتا θ = ٥ ، فإن ٣ حتا θ − ٤ حا θ = ...

(٥ ، ٤ ، ٢ ، صفر)

(٥) **فى الشكل المقابل :**

مساحة القطعة الدائرية الصغرى

التى وترها $\overline{أب}$ ≃ .... سم^٢

(٢,٢ ، ٤,٤ ، ٨,٨ ، ٤٤)

(ب) إذا كان $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} س & ٣ \\ ٤ & ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٨ \\ ١١ & ١٨ \end{pmatrix}$ فأوجد قيمة س ، ص

(جـ) أثبت أن : $\frac{\text{حا}\theta\text{حتا}\theta}{\text{طا}\theta} + \frac{\text{طا}\theta}{\text{قا}\theta\text{ قتا}\theta} = ١$

(٢) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة القليوبية الأزهرية) ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

١ اكمل ما يأتى :

(١) أوجد مساحة المثلث فيه إحداثيات رؤوسه هى :

(−١ ، −٣) ، (٢ ، ٤) ، (−٣ ، ٥) مستخدمًا المحددات .

(٢) قطاع دائرى طول نصف قطر قاعدته ٧ سم ، زاويته المركزية ٢,١^{د} أوجد مساحته .

(٣) إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = أ س^٢ + ب يمر بالنقطتين (٢ ، ٠) ، (−١ ، −٣) أوجد باستخدام المصفوفات قيمتى أ ، ب .

(٤) من قمة برج ارتفاعه ٦٠م وجد أن قياس زاوية انخفاض جسم واقع فى المستوى الأفقى المار بقاعدة البرج هى ٣٦َ ٢٨° ، أوجد بعد الجسم عن قاعدة البرج لأقرب متر .

(٥) إذا كان $\begin{vmatrix} ٢ & ٢س \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} = ١٠$ فأوجد قيمة س .

٢ اجب على الأسئلة الآتية :

(١) قطعة دائرية طول نصف قطرها ١٠ سم وطول قوسها ٥ سم . أوجد مساحتها .

(٢) بطريقة (كرامر) أوجد مجموعة الحل لنظام المعادلات الخطية الآتية :

٢س − ٣ص = ٣ ، س + ٢ص = ٥

(٣) مثل أنظمة المتباينات الآتية : حيث س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٣س + ص ≥ ١٥

٤س + ٣ص ≥ ٢٤ ثم أوجد النقطة التى تحقق دالة الهدف

ر = ٣ص + ٢س أقل ما يمكن .

(٤) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & ١- & ٤ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س حيث : ٢س^{مد} − أ ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ٣ \\ ٢- & ١ & ٣- \end{pmatrix}$

(٥) أوجد مجموعة الحل للمعادلة : ٤ حا^٢ θ − ٣ حا θ حتا θ = صفر

حيث ∈ [٠ ، ٢π[

(٣) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة المنوفية الأزهرية) ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

١ (أ) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(١) إذا كان $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ١- \\ ٢- & س \end{pmatrix} = I$ فإن س = ...

(٥ أ، ٤ أ، ٣ أ، ٢)

(٢) المقدار حا^٢ θ + طا^٢ θ حا^٢ θ فى أبسط صورة يساوى ....

(حا^٢ θ أ، طا^٢ θ أ، −١ أ، ١)

(٣) النقطة التى تنتمى لمجموعة حل المتباينات : س ≤ ٣ ، ص > ٣

س + ص > ٤ هى ....

((٤ ، ٣) أ، (٣ ، ١) أ، (٣ ، ٢) أ، (٣ ، ٣))

....

(٤) قطاع دائرى محيطه ٢٤ سم وطوله قوسه ١٠ سم فإن مساحته .... سم^2
(٢٠ ، ٣٥ ، ٥٠ ، ٦٥)

(ب) إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ، (أ + ب)^{مد} = $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

أوجد : (١) المصفوفة ب .   (٢) أ ب

(جـ) مثل بيانياً مجموعة المتباينات الآتية :

س ≥ ٣ ، ص ≥ س + ٢ ، س + ٢ص ≤ −٢

---

❷ (أ) أكمل ما يأتى :

(١) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين وكانت أ ب^{مد} مُعرفة ، فإن (أ ب^{مد})^{مد} = ...

(٢) مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها نق وقياس زاويتها المركزية θ^{ء} = ...

(٣) مساحة سطح المثلث الذى إحداثيات رؤوسه (−١ ، −٣) ، (٢ ، ٤) ، (−٣ ، ٥) تساوى .... وحدة مربعة .

(٤) إذا كان حتا (٩٠° − θ) = ١ ، فإن الحل العام للمعادلة هى ....

(ب) حل نظام المعادلات الآتية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة :

س + ٣ص = ٥ ، ٢س + ٥ص = ٨

(جـ) من قمة برج ارتفاعه ٥٠ متر قيست زاوية انخفاض سيارة على الأرض فوجد أن قياسها ١٥َ ٢٧° حيث السيارة وقاعدة البرج فى مستوى أفقى واحد .
أوجد بعد السيارة عن قاعدة البرج لأقرب متر .

(٤) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة الشرقية الأزهرية) ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

❶ (أ) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(١) المصفوفة $\begin{pmatrix} أ & 12 \\ 3 & أ \end{pmatrix}$ لها معكوس ضربى عندما أ ....
(٦ ، ±٦ ، ∈ ح − {٦} ، ∈ ح − {−٦ ، ٦})

(٢) إذا كان قا^2 θ = ٥ فإن ٣ + ظا^2 θ = ...
(٧ ، ٣ ، ٥ ، ١٠)

(٣) إذا كان $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2س & 5 \\ 6 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ = ١١ ، فإن س = ...
(٣ ، ٢ ، ٤ ، ٥)

(٤) قطاع دائرى محيطه ١٠ سم وطوله قوسه ٢ سم ، فإن مساحته = ... سم^2
(٣ ، ٤ ، ٨ ، ٦)

(ب) باستخدام المحددات أوجد مساحة المثلث الذى رؤوسه :
(٢ ، ٤) ، (٥ ، ٢) ، (−٣ ، −٢)

(جـ) أوجد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ٨ سم وقياس زاويتها المركزية ١٢٠° .

---

❷ (أ) أكمل ما يأتى :

(١) أبسط صورة للمقدار : (حا^2 θ + حتا^2 θ)^2 + ظتا^2 θ هى ....

(٢) إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} 4 & 2س - 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ متماثلة فإن س = ...

(٣) إذا كانت : ١٨٠° < θ < ٣٦٠° ، وكانت : ٢ حتا θ + ١ = ٠ ،
فإن : θ = ...

(٤) إذا كانت المصفوفة أ على النظم ٢ × ٣ ، ب^{مد} مصفوفة على النظم ١ × ٣
فإن المصفوفة أ ب على النظم ....

(ب) أوجد القيمة الصغرى لدالة الهدف ر = ٣س + ٢ص تحت القيود :
س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≤ ٤ ، ٣س + ص ≥ ٦

(جـ) من نقطة على سطح الأرض قيست زاوية ارتفاع قمة برج فوجد أن قياسها ٢٥° وكان بعد الراصد عن قاعدة البرج يساوى ٦٠ م أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر .

[illegible]

(٤) النقطة التي تنتمي إلى مجموعة حل المتباينات س > ٢ ، ص > ١ ، س + ص ≤ ٣ هي ......

((٣ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ١))

(ب) أوجد القيمة العظمى لدالة الهدف : ر = ٢س + ص تحت القيود ،

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٢س + ٣ص ≥ ١٨ ، −٤س + ص ≥ −٨

(جـ) حل نظام المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات :

٣س = ١ − ٤س ، ٥س + ١٢ = ٧ص

② (أ) أكمل ما يأتي :

(١) مساحة القطاع الدائري الذي محيطه ١٢ سم ، طول قوسه ٦ سم تساوي ......

(٢) قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ = ...

(٣) إذا كان $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ \text{٣ب} + 1 & \text{٢أ} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

فإن أ = ... ، ب = ...

(٤) في الشكل المقابل :

فإن س = ... سم

ص = ... سم

(ب) أوجد مستخدمًا المحددات مساحة Δ أ ب جـ حيث :

أ(−٢ ، −٢) ، ب(٣ ، ١) ، جـ(−٤ ، ٣)

(جـ) أ ب وتر في دائرة طوله ٨ سم يقابل زاوية مركزية قياسها ٩٠° لأقرب رقم عشري واحد ، أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغرى التي وترها $\overline{\text{أب}}$

(٦) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة الأقصر الأزهرية) ١٤٤٠هـ/٢٠١٨م

① (أ) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(١) إذا كان $\begin{vmatrix} \text{ص} & \text{س} \\ \text{ل} & \text{ع} \end{vmatrix} = 3$ ، فإن $\begin{vmatrix} \text{٥ص} & \text{٢س} \\ \text{٥ل} & \text{٢ع} \end{vmatrix}$ = ...

(٦ ، ٢٥ ، ٣٠ ، ١٥)

(٢) النقطة التي تنتمي إلى مجموعة المتباينات س > ٢ ، ص > ١ معًا هي ...... [(١ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ١) ، (٣ ، ٢)]

(٣) إذا كان قا² أ = ١٥ ، فإن طا² أ = ...

(١٦ ، ٢٢٤ ، ١٤ ، ٢٢٦)

(٤) القطاع الدائري الذي طول قوسه ١٦ سم ، وطول قطر دائرته ١٨ سم مساحته ...... سم² (٢٧ ، ٧٢ ، ١٨ ، ١٤٤)

(ب) إذا كان بᵗ + جـᵗ = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ ، أ = $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س التي تحقق أن : س = (أ ب + أ جـ)ᵗ

(جـ) أوجد مساحة القطعة الدائرية الكبرى التي طول وترها = طول نصف قطر دائرتها = ١٢ سم

٣ (أ) أكمل ما يأتى :

(١) $\begin{vmatrix} \text{قا}\,\theta & \text{ظا}^2\theta \\ ١ & \text{قا}\,\theta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٥ & -٧ \end{vmatrix} =$ ....

(٢) الثمانى المنتظم الذى طول ضلعه ٧ سم مساحته = ... سم^2 لأقرب رقمين عشريين.

(٣) إذا كان $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ \\ ١ \end{pmatrix}$ فإن س = ... ، ص = ...

(٤) عمود إنارة طوله ٧,٢ متراً يلقى ظلاً على الأرض طوله ٤,٨ متراً ، فإن قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذ = ...

(ب) إذا كان : حا θ + حتا $\theta = \frac{٣}{٢}$ ، حيث : $\theta \in [٠ ، \frac{٣\pi}{٢}]$

فأوجد قيمة : حا θ حتا θ

(جـ) أوجد بيانياً مجموعة حل المتباينات الآتية :

س ≥ صفر ، ص ≥ صفر ، س + ص ≤ ٦ ، ٢س + ص ≤ ١٠

ثم أوجد القيمة العظمى لدالة الهدف ر = ٤س + ص

أجب عن السؤال الآتى :

١ اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(أ) النقطة التى عندها للدالة ر = ٣٥ س + ١٠ ص قيمة عظمى هي ....

[(٠ ، ٠) أ، (٠ ، ١٠) أ، (٠ ، ٤٠) أ، (٢٠ ، ١٠)]

(ب) قيمة أ التى تجعل للمصفوفة $\begin{pmatrix} \text{أ} & ٤ \\ ٩ & \text{أ} \end{pmatrix}$ معكوساً ضربياً هى ح − {......}

(± ٦ أ، ± ٣ أ، $\pm \sqrt{١٣}$ أ، $\pm \sqrt{٥}$)

(جـ) المقدار حا $(٩٠° - \theta)$ قتا $(٩٠° - \theta)$ فى أبسط صورة يساوى ....

(١ أ، $\text{حا}^2\theta$ أ، $\text{حتا}^2\theta$ أ، حا θ حتا θ)

(د) محيط القطاع الدائري الذى طول قوسه ٤ سم وطول قطر دائرته ١٠ سم = ... سم

(١٤ أ، ٢٠ أ، ٣٠ أ، ٢٤)

أجب عن سؤالين فقط مما يأتى :

٢ (أ) إذا كان $\begin{pmatrix} \text{س}+٨ & -٥ \\ ٣ & -\text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٨ & -٥ \\ ٣ & ٤\text{ص}-١٠ \end{pmatrix}$

فأوجد قيمة س ، ص ثم أوجد $(\text{س} \quad \text{ص}) \begin{pmatrix} ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$

(ب) أثبت صحة المتطابقة : ظا θ + ظتا θ = قا θ قتا θ

٣ (أ) حل نظام المعادلات الخطية التالية باستخدام طريقة كرامر :

س + ٢ص = ٥ ، ٣س + ص = ٥

(ب) أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ٥ سم وقياس زاويتها ١٥٠° لأقرب سم^2 .

٤ (أ) حل النظام الآتى بيانيًا : ٣س + ٥ص ≤ ١٥ ، ص < س − ١

(ب) يقف شخص على بعد ٥٠ متر من قاعدة برج ، رصد زاوية ارتفاع قمة البرج ، فوجد أن قياسها ٢٥° أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر.

• أجب عن السؤال الآتي (إجباري):

① أكمل ما يأتي:

(أ) المصفوفة أ تكون متماثلة إذا كان .... ويكون لها معكوس ضربي إذا كان ....

(ب) مضلع ثماني منتظم طول ضلعه ٦ سم فإن مساحته = ... سم²

(جـ) قطاع دائري محيطه ١٢ سم، طول قوسه ٣ سم فإن مساحته = ... سم²

(د) إذا كان: $\begin{vmatrix} ٢س & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix} = ١٠$ فإن س = ...

أجب عن سؤالين فقط مما يأتي:

② (أ) إذا كان: $أ^{-1} = \begin{pmatrix} ٢ & -٤ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ فأثبت أن: $أ^2 - ٥أ + ٢٢I = $ ☐

(ب) قطعة دائرية قياس زاويتها المركزية ٩٠° ومساحتها ٥٦ سم² أوجد طول نصف قطرها.

③ (أ) عين مجموعة حل المتباينات بيانيًا:

س ≥ ٠، ص ≥ ٠، س + ٣ص ≤ ٧ ، ٣س + ٤ص ≤ ١٤

ثم أوجد قيمة: س، ص التي تجعل ر = ٣٠س + ٥٠ ص أكبر ما يمكن.

(ب) أثبت أن: $\frac{١ + ظا^2 θ}{قا^4 θ} = ١ - حا^2 θ$

④ (أ) أوجد مساحة المثلث أ ب جـ حيث:

أ(٣، ٣) ، ب(-٤، ٢) ، جـ(١، -٤)

باستخدام المحددات.

(ب) حل المعادلتين الآتيتين باستخدام المصفوفات:

٢ص = ٥ − ٣س ، ٢س = ٣ − ص

• أجب عن السؤال الآتي (إجباري):

① أكمل ما يأتي:

(أ) $(حا θ + حتا θ)^2 - \frac{٢}{قا θ \, قتا θ} = $ ....

(ب) إذا كان أب = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ فإن $ب^{مد} أ^{مد} = $ ....

(جـ) مساحة △ س ص ع حيث س(٣، ٣)، ص(-٤، ٢)، ع(١، -٤) تساوي .... وحدة مربعة

(د) إذا كانت س مصفوفة بحيث س × $\begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix}$

فإن مصفوفة س = ...

أجب عن سؤالين فقط مما يأتي:

② (أ) حل نظام المعادلات الخطية الآتية بطريقة كرامر:

س + ص = ٥ − ٣ع ، ص = ع ، ٢س − ٤ع = −٢

(ب) طائرة ورقية طول خيطها ٤٢ متر، إذا كانت الزاوية التي يصنعها الخيط مع الأرض الأفقية تساوي ٦٣°، أوجد لأقرب متر ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض.

③ (أ) أوجد القيمة الصغرى لدالة الهدف: ر = ٤س + ص تحت القيود:

س + ص ≥ ٦ ، ٢س + ص ≥ ١٠ ، س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

(ب) أوجد الحل العام للمعادلة $حتا\left(\frac{π}{٢} - θ\right) = \frac{١}{٢}$

④ (أ) إذا كانت المصفوفة ب = $\begin{pmatrix} صفر & -٢س & -٥ \\ ع+٦ & صفر & ٣ع \\ ٣ص+س & ٦ & صفر \end{pmatrix}$ شبه متماثلة

أوجد س، ص، ع

(ب) قطعة دائرية قياس زاويتها المركزية ٩٠° ومساحة سطحها ٥٦ سم²، أوجد طول نصف قطرها ومساحة القطع لهذه القطعة؟

(١٠) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة الشرقية الأزهرية) ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

• أجب عن السؤال الآتي (إجباري):

❶ أكمل ما يأتي :

(أ) إذا كان $\begin{pmatrix} س & ١ \\ -٢ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ١ \\ -٢ & ص \end{pmatrix}$ ، فإن س + ص = ...

(ب) إذا كان $\begin{vmatrix} ٥ & أ \\ أ & ٥ \end{vmatrix}$ = ٢٥ فإن أ = ...

(جـ) إذا كان ٢ حا θ = ١ ، فإن ق (θ) = ... حيث θ ∈]٩٠° ، ١٨٠°[

(د) إذا كان قا² θ = ٥ فإن ظا² θ = ...

أجب عن سؤالين فقط مما يأتي :

❷ (أ) أوجد مساحة المثلث الذي رؤوسه (-٤ ، ٢) ، (٣ ، ١) ، (-٢ ، ٥) باستخدام المحددات

(ب) أثبت صحة المتطابقة : حا θ حا (٩٠ - θ) ظا θ = ١ - حتا² θ

---

❸ (أ) أوجد القيمة العظمى للدالة الهدف حيث : ر = ٢س + ص تحت القيود

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٢س + ٣ص ≤ ١٨ ، -٤س + ص ≥ -٨

(ب) قطاع دائري طول قوسه ٧ سم ومحيطه ٢٥ سم أوجد مساحته .

---

❹ (أ) إذا كانت ص = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & صفر \end{pmatrix}$ ، أثبت أن : ص² - ٢ص - ٣I = ☐

(ب) رصد قارب من قمة فنار ارتفاعه ٦٠ متر فوجد أن زاوية انخفاضه ٣٠° أوجد بعد القارب عن قمة الفنار.

(١١) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة الغربية الأزهرية) ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

• أجب عن الأسئلة الآتية :

❶ أكمل ما يأتي :

(أ) إذا كانت المصفوفة س على النظم ٣ × ٢ والمصفوفة ص على النظم ٢ × ١ فإن س ص على النظم ....

(ب) إذا كان س = $\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٠ & ٧ \end{pmatrix}$ فإن س^{-} = ...

(جـ) إذا كان $\begin{vmatrix} ٤ & ٢أ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix}$ = ١٠ فإن أ = ...

(د) إذا كان ظا θ = ٣ فإن قا² θ = ...

---

❷ (أ) أثبت صحة المتطابقة : حا θ حا (٩٠ - θ) ظا θ = ١ - حتا² θ

(ب) قطاع دائري طول قوسه ٧ سم ومحيطه ٢٥ سم أحسب مساحته.

---

❸ (أ) من قمة برج ارتفاعه ٦٠م رصد شخص زاوية إنخفاض جسم واقع في المستوى الأفقي المار بقاعدة البرج تساوي ٣٦َ ٢٨° ، أوجد بعد الجسم عن قاعدة البرج لأقرب متر.

(ب) عين مجموعة حل المتباينات الآتية بيانياً

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٣ص + س ≥ ١٥ ، ٤س + ٣ص ≤ ٢٤

ثم أوجد من مجموعة الحل قيم س ، ص التي تجعل دالة الهدف :

ر = ٣ص + ٢س أقل ما يمكن .

(١٢) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة البحيرة الأزهرية) ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

• أجب عن السؤال الآتي (إجباري):

❶ اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(أ) المقدار : حا θ حتا θ ظا θ في أبسط صورة ....

(حا² θ أ، حتا² θ أ، ظا² θ أ، ١ - حا² θ)

(ب) إذا كان أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ ، بمد مصفوفة على النظم ١ × ٣ فإن المصفوفة أ ب تكون على النظم ....

(٣ × ٣ أ، ٣ × ١ أ، ٢ × ١ أ، ١ × ٢)

(جـ) إذا كان ٠° ≥ θ ≥ ١٨٠° وكان √٣ طا هـ – ١ = صفر ، فإن θ تساوى ....

(٣٠° أ، ٦٠° أ، ١٢٠° أ، ١٥٠°)

(د) النقطة التى تنتمى إلى مجموعة حل المتباينات الآتية :

س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، ٢س + ص < ٤ ، س + ٣ص < ٦ هى ....

[(١ ، -٣) أ، (٣ ، ٠) أ، (٢ ، ٣) أ، (١ ، ١)]

أجب عن سؤالين فقط مما يأتى :

❷ (أ) إذا كان أمد = $\begin{pmatrix} -٤ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ ، فأثبت أن : أ٢ – ٥أ + ٢٢I = ☐

(ب) أوجد القيمة العظمى لدالة الهدف ر = ٢س + ص تحت القيود

س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، ٢س + ٣ص ≥ ١٨ ، –٤س + ص ≤ –٨

---

❸ (أ) أوجد مساحة المثلث الذى رؤوسه (–٤ ، ٢) ، (٣ ، ١) ، (–٢ ، ٥) باستخدام المحددات.

(ب) وتر فى دائرة طوله ٨ سم وعلى بعد ٣ سم من مركزها. أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغرى الحادثة من تقاطع هذا الوتر مع سطح الدائرة.

---

❹ (أ) حل نظام المعادلات الخطية التالية باستخدام المصفوفات :

س + ٣ص – ٥ = صفر ، ٢س = ٨ – ٥ص

(ب) رصد قارب من قمة فنار ارتفاعه ٥٠م فوجد أن زاوية انخفاضه ٣٥°.
أوجد بعد القارب عن قمة الفنار لأقرب متر.

(١٢) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة أسيوط الأزهرية) ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

• أجب عن السؤال الآتى (إجباري):

❶ اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(أ) إذا كان أ + أمد = ☐ فإن أ هى ....

(مصفوفة صف أ، مصفوفة عمود أ، مصفوفة متماثلة أ، مصفوفة شبه متماثلة)

(ب) طا θ قتا θ = ... (١ أ، حتا θ أ، قا θ أ، حا θ)

(جـ) النقطة التى تحقق منطقة حل المتباينات : س > ٢ ، ص > ١ ، س + ص > ٣ هى .... [(٣ ، ١) أ، (١ ، ٢) أ، (٣ ، ٢) أ، (١ ، ٣)]

(د) قطاع دائرى طول قطر دائرته ٨ سم وطول قوسه ٦ سم فإن مساحته ....

(١٢ سم٢ أ، ٤٨ سم٢ أ، ٢٤ سم٢ أ، ٧ سم٢)

أجب عن سؤالين فقط مما يأتى :

❷ (أ) إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٣ & -١ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -٢ \\ ١ \\ ٤ \end{pmatrix}$ أوجد أ ب إن أمكن

(ب) من نقطة على سطح الأرض وعلى بعد ٥٠م من قاعدة برج وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة برج ٣٨° ٢٦َ أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر.

---

❸ (أ) باستخدام المحددات أوجد مساحة Δ أ ب جـ حيث :

أ (١ ، ٢) ، ب (٣ ، –٤) ، جـ (–٢ ، ٣)

(ب) أوجد بيانيًا مجموعة حل المتباينات ٢س + ص ≥ ٤ فى ح × ح

---

❹ (أ) مثلث أطوال أضلاعه ٦ سم ، ١٠ سم ، ٨ سم أوجد مساحته.

(ب) إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$ أثبت أن : أ٢ – ٢أ – ٣I = ☐

• أجب عن السؤال الآتي (إجباريًا) :

❶ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(أ) مجموعة حل المعادلتين : س − ٣ص = −٤ ، ٢س + ص = ٢ هي ......

[{(١/٧ ، ٢/٧)} أ، {(٢/٧ ، ٨/٧)} أ، {(٢/٧ ، ١٠/٧)} أ، {(٣/٧ ، ٢/٧)}]

(ب) قطاع دائري محيطه ١٠ سم وطول قوسه ٢ سم فإن مساحته بالسنتيمترات المربعة تساوي ......

(٤ أ، ٨ أ، ١٠ أ، ٢٠)

(جـ) أبسط صورة للمقدار : (حا θ + حتا θ)^2 − ٢ حا θ حتا θ تساوي ......

(صفر أ، ١ أ، ٢ أ، ٣)

(د) إذا كانت المصفوفة أ على النظم ٢ × ٣ فإن عدد عناصر أ يساوي ......

(٣ أ، ٦ أ، ٩ أ، ١٢)

• أجب عن سؤالين فقط مما يأتي :

❷ (أ) أثبت صحة المتطابقة الآتية : $\frac{\text{حتا س ظا س}}{\text{قتا س}}$ = ١ − حتا^2 س

(ب) إذا كانت : م = $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ فأثبت أن : م^2 − م − ٢I = ☐

❸ (أ) إذا كانت : م = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ فأثبت أن : م$^{-1}$ = م

(ب) أوجد مساحة القطعة الدائرية التي طول نصف قطرها ١٢ سم وطول قوسها ٢٠ سم .

❹ (أ) رصد قارب من قمة فنار ارتفاعه ٥٠ م ، فوجد أن زاوية انخفاضه ٣٥° ، أوجد بعد القارب عن قمة الفنار .

(ب) عين مجموعة حل المتباينات الآتية بيانيًا :

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≤ ٨ ، ص ≥ ٣

ثم أوجد مجموعة قيمة س ، ص التي تجعل قيمة الدالة ر = ٣س + ٢ص

• أجب عن الأسئلة الآتية :

❶ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(أ) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ وكان نظم أ ب هو ٢ × ١ فإن ب مصفوفة على النظم ......

(٢ × ٢ أ، ٣ × ١ أ، ٢ × ١ أ، ٣ × ٣)

(ب) النقطة التي لا تنتمي إلى مجموعة حل المتباينة : س + ص ≤ ٤ هي ......

[(٢ ، ٠) أ، (٠ ، ٢) أ، (٣ ، ٤) أ، (١ ، ٢)]

(جـ) مجموعة حل المعادلة : حا θ + حتا θ = صفر حيث ١٨٠° < θ < ٣٦٠° تساوي ......

(٢١٠° أ، ٢٢٥° أ، ٢٤٠° أ، ٣١٥°)

(د) مساحة المثلث المتساوي الأضلاع الذي طول ضلعه ٦ سم تساوي ......

(٦ $\sqrt{3}$ سم^2 أ، ٩ $\sqrt{3}$ سم^2 أ، ١٢ $\sqrt{3}$ سم^2 أ، ١٨ $\sqrt{3}$ سم^2)

❷ (أ) أوجد مساحة القطعة الدائرية التي طول نصف قطر دائرتها ٨ سم ، وقياس زاويتها المركزية ٢٫٠٢^{ء}

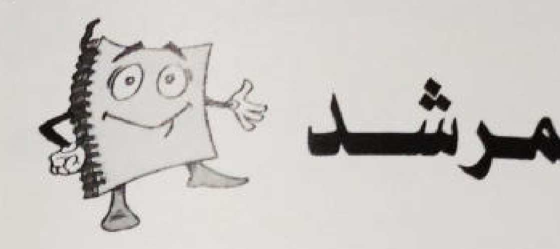
(ب) استخدم طريقة كرامر في حل نظام المعادلتين الآتيتين :

س + ٢ص = ٠ ، ٢س − ٣ص = ١

❸ (أ) من نقطة على سطح الأرض تبعد ٥٠ مترًا عن قاعدة عمود رأسي وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة العمود ١٥َ ٣٢° ، أوجد لأقرب متر ارتفاع العمود عن سطح الأرض .

(ب) أوجد قيمتي س ، ص اللتين تجعلان لدالة الهدف ر = ٦س + ٤ص قيمة عظمى تحت القيود :

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٢س + ص ≤ ٨ ، س + ص ≤ ٦



المرشـــد

فى الرياضيات

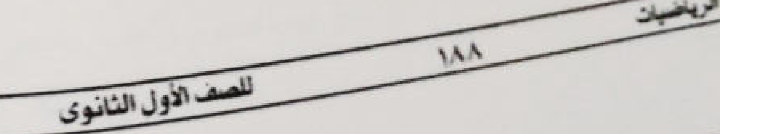
نماذج امتحانات الهندسة التحليلية

للصف الأول الثانوى

الفصل الدراسى الثانى

إعـــداد

سعيد جـودة



(الفصل الدراسى الثانى) فى الهندسة التحليلية

(١) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة القاهرة الأزهرية) ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

١ (أ) اكمل ما يأتى :

(١) المتجه : $\overrightarrow{أ}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ + ٢$\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{ص}$ على الصورة القطبية هو ....

(٢) إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (٢ ، ١) إلى المستقيم :
٤س − ٣ص + جـ = صفر يساوى ٣ وحدة طول فإن جـ = ... أو ......

(٣) إذا كان أ = (−٤ ، ٤) ، ب = (٥ ، −٣) ، جـ ∈ $\overline{أب}$ بحيث
أ جـ : جـ ب = ٣ : ١ ، فإن جـ = (...... ، ......)

(٤) مساحة سطح المثلث المحدد بمحور السينات ومحور الصادات والمستقيم ٣س − ٤ص = ١٢ تساوى .... وحدة مساحة .

(٥) أ ب جـ ء متوازى الأضلاع حيث : أ = (٢ ، −١) ، ب = (٧ ، ١) ، جـ = (٤ ، ٤) فإن إحداثى نقطة ء = ...

(ب) أثبت أن المستقيمين س − ٤ص + ١٤ = صفر ، ٤س + ص + ٥ = صفر متعامدان ثم أوجد نقطة تقاطعهما ومعادلة المستقيم المار بنقطة التقاطع والنقطة (٣ ، ٢)

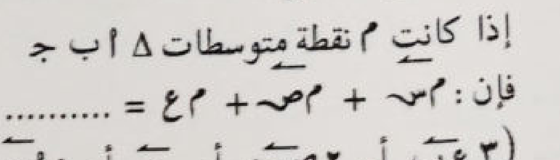
(جـ) فى أى شكل رباعى أ ب جـ ء أثبت أن : $\overrightarrow{أب}$ + $\overrightarrow{ءجـ}$ = $\overrightarrow{أجـ}$ + $\overrightarrow{ءب}$

٢ (أ) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

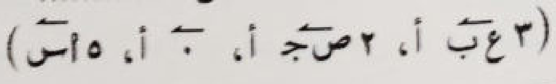
(١) إذا كان : $\overrightarrow{ق_١}$ = (٦ ، $\frac{٢\pi}{٣}$) ، $\overrightarrow{ق_٢}$ = (٦ ، $\frac{٤\pi}{٣}$) ، $\overrightarrow{ق_٣}$ = ٩ $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{ص}$
فإن مقدار محصلة هذه القوى = ...

(١٣ أ، ١٠ أ، ٥ أ، ٦$\sqrt{٣}$)

(٢) **فى الشكل المقابل :**



إذا كانت م نقطة متوسطات Δ أ ب جـ
فإن : $\overrightarrow{مس}$ + $\overrightarrow{مص}$ + $\overrightarrow{مع}$ = ...



(٣ $\overrightarrow{عب}$ أ، ٢ $\overrightarrow{صجـ}$ أ، $\overrightarrow{٠}$ أ، ٥ $\overrightarrow{أس}$)

(٣) إذا كان أ = (٥ ، ٢) ، ب = (٢ ، ١٠) فـإن محور الصادات يقسم $\overline{أب}$ بنسبة ....

(٢ : ١ من الداخل أ، ٥ : ٢ من الخارج
أ، ٢ : ١ من الخارج أ، ٥ : ٢ من لداخل)

(٤) قياس الزاوية المنفرجة بين المستقيمين ص = (٢ − $\sqrt{٣}$)(س + ٥)
ص = (٢ + $\sqrt{٣}$)(س − ٧) هو ....°

(١٥٠ أ، ١٣٥ أ، ١٢٠ أ، ١١٠)

(٥) إذا كان $ل_١$ = أس − ٣ص + ٧ = صفر ، $ل_٢$ = $\frac{س}{٣}$ − $\frac{ص}{٣}$ = ٣
فإن أ = ... حيث $ل_١$ // $ل_٢$

(ب) أوجد المعادلة الكارتيزية للمستقيم المـار بالنقطـة (٣ ، −٥) ويـوازى المستقيم $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، ٢) + ك(٢ ، −٣)

(ج) دائرة مركزها نقطة الأصل . أثبت أن الوترين المرسومين فى الدائرة واللذان معادلتاهما : ٣س + ٤ص + ١٠ = صفر ، ٥س − ١٢ص + ٢٦ = صفر متساويان فى الطول .

(٢) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة القليوبية الأزهرية) ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

١ أجب عن الأسئلة الآتية :

(أ) **أولا :** أوجد المعادلة المتجهه للمستقيم المار بالنقطة (٣ ، −١) ويصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه لمحور السينات .

ثانيا : أوجد طول العمود المرسوم من النقطـة (١ ، ٢) علـى المسـتقيم ٥س − ١٢ص −٧ = صفر

(ب) **أولا :** إذا كـانت جـ(٢ ، ٦) هى منتصـف $\overline{أب}$ حيـث ب(٣ ، ٧) فـأوجد إحداثى أ

ثانيا : إذا كانت : $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، ك) ، $\overrightarrow{ب}$ = (−٤ ، ٢) وكان $\overrightarrow{أ}$ ⊥ $\overrightarrow{ب}$ فأوجد قيمة ك .

(جـ) أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : ٢س − ٣ص = −٤
$\overrightarrow{ر}$ = (١ ، ٢) + ك(٣ ، ٤)

(ء) أثبت أن المستقيمين :
$\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٤) + ك(١ ، −٢) ، ٢س + ص + ٢ = صفر متوازيان .

(هـ) إذا كان أ = (٢ ، −٣) ، ب = (١ ، −١) أوجد إحداثى النقطة جـ التى تقسم $\overline{أب}$ من الخارج بنسبة ٤ : ٣

٢ (أ) **أولا :** إذا كانت $\overrightarrow{أ}$ = (٧ ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٣ ، ك) ، ‖$\overrightarrow{أب}$‖ = ٥ فأوجد قيمة ك .

ثانيا : أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٢) ويوازى محور الصادات .

(ب) **أولا :** إذا كان $\overrightarrow{وأ}$ = (٨$\sqrt{٣}$ ، ٨) أوجد الصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{وأ}$

ثانيا : أوجد طولى الجزئين المقطوعين من المحورين بالمستقيم :
٣س + ٤ص − ١٢ = صفر

(جـ) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين س + ص = ٥
٢س + ص − ٨ = ٠ ويمر بالنقطة (٢ ، ١) .

(ء) أوجد مساحة الشكل الخماسى المنتظم الذى طول ضلعه ١٦ سم مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين .

(هـ) أ ب جـ مثلث أخذت النقطة ء ∈ $\overline{بجـ}$ بحيث ٢$\overline{بء}$ = ٣$\overline{ءجـ}$
أثبت أن : ٢$\overrightarrow{أب}$ + ٣$\overrightarrow{أجـ}$ = ٥$\overrightarrow{أء}$

(٣) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة المنوفية الأزهرية) ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

١ (أ) **اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :**

(١) إذا كان : $\overrightarrow{م}$ = (٣ ، ٢) ، $\overrightarrow{هـ}$ = (٢ ، ك) وكان $\overrightarrow{م}$ ⊥ $\overrightarrow{هـ}$ فإن ك = ...

($\frac{٣}{٤}$ أ، $\frac{٤}{٣}$ أ، ٣ أ، −٣)

(٢) المتجه $\overrightarrow{أ}$ = ٢$\overrightarrow{س}$ − ٢$\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{ص}$ على الصورة القطبية هو ....

[(٤ ، $\frac{٣}{٥}$π) أ، (٤ ، $\frac{٥}{٣}$π) أ، (٤ ، ٢٤٠°) أ، (−٤ ، ١٢٠°)]

(٣) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : ٣س − ص + ٦ = ٠ ،
٢س + ص = ٥ تساوى .... (١٥° ، ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠°)

(٤) فى Δ أ ب جـ يكون $\overrightarrow{أب}$ + $\overrightarrow{بجـ}$ + $\overrightarrow{أجـ}$ = ...

(٢$\overrightarrow{أب}$ ، ٢$\overrightarrow{جـأ}$ ، $\overrightarrow{و}$ ، $\overrightarrow{بجـ}$)

....

(ب) إذا كان: ٢ ل + ٥ س ص = ٢ ع ص − ٣ ص س ، أثبت أن: ل = ع س

(جـ) أب قطر فى دائرة مركزها م = (−٢ ، ١) فإذا كان ب = (−٦ ، ٣)
أوجد معادلة المستقيم المماس للدائرة عند نقطة أ

---

❷ (أ) أكمل ما يأتى :

(١) إذا كان ‖ك أ‖ = ‖−١٥ أ‖ ، فإن ك = ...

(٢) إذا كانت أ = (−٣ ، ٤) ، ب = (٦ ، −٨) فإن محور السينات يقسم أب بنسبة ....

(٣) طول العمود المرسوم من نقطة (٩ ، ٥) على المستقيم ٣س + ٤ص = ١٢ يساوى .... وحدة طول .

(٤) أ ب جـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م فإن أب + ٢ ب م = ...

(ب) جـ ∈ ب أ ، جـ ∉ أب وكانت أ = (٣ ، ٤) ، ب = (−٥ ، ٢)
وكان ب جـ = ٢ أ ب . أوجد إحداثى نقطة جـ

(جـ) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٥ ، ٢) وبنقطة تقاطع المستقيمين :
٢س + ص = ٥ ، ٣س − ٢ص = ٤

(٤) امتحان (الادارة المركزية لمنطقة الشرقية الأزهرية) ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

❶ (أ) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(١) إذا كان أ = (٦ ، ٣) ، ب = (٣ ، −١) ، فإن أب = ...
((٣ ، ٤) أ، (٩ ، ٢) أ، (−٣ ، −٤) أ، (٩ ، ٤))

(٢) إذا كان م = (٣ ، ٢) ، هـ = (٢ ، ك) وكان م ⊥ هـ فإن : ك = ...
($\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٤}{٣}$ ، ٣ ، −٣)

(٣) المتجه أ = ٢ س + ٢$\sqrt{٣}$ ص على الصورة القطبية هو ....
((٤ ، $\frac{٣}{٥}$π) أ، (٤ ، $\frac{٥}{٣}$π) أ، (٤ ، ٦٠°) أ، (−٤ ، ١٢٠°))

(٤) طول العمود المرسوم من نقطة الأصل إلى المستقيم :
ر = (٥ ، صفر) + ك(٤ ، ٣) يساوى .... وحدة طول .
(٣ أ، ٤ أ، ٥ أ، ١٥)

....

(ب) أثبت أن : المستقيمين ل١ : ٢س + ص − ٤ = ٠
ل٢ : ٢س + ص + ٣ = ٠ متوازيان وأوجد البعد بينهما .

(جـ) أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٣ ، −١)
ومتجه الاتجاه له (−٣ ، ٥)

---

❷ (أ) أكمل ما يأتى :

(١) إذا كان أ = ٢ س + ٣ ص ، ب = ٣ س − ٢ ص
فإن ٢ أ − ب = ...

(٢) معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل وبنقطة تقاطع المستقيمين :
س = ٢ ، ص = ٥ هى ....

(٣) إذا كان أ = (٤ ، ٢) ، ب = (١ ، −٢) ،
فإن ‖٣ أ + ٢ ب‖ = ...

(٤) إذا كان أ ب جـ مثلث فيه **د** منتصف ب جـ ،
فإن أب + أجـ = ...

(ب) أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين :
ل١ : س + ٥ص = ٣ ، ل٢ : ر = (٢ ، ٣) + ك(٤ ، ١)

(جـ) إذا كانت النقطة أ = (٢ ، ٥) ، ب = (٧ ، −١)
أوجد إحداثى النقطة جـ التى تقسم أب من الخارج بنسبة ٣ : ٢

(٥) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة البحيرة الأزهرية) ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

❶ (أ) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(١) إذا كان أ = (−٢ ، ١) ، جـ = (−٣ ، ك) متوازيين فإن ك = ...
($\frac{٢}{٣}$ أ، $\frac{٣}{٢}$ أ، ٦ أ، −٦)

(٢) إذا كان أ (−٣ ، ٤) ، ب (٦ ، −٨) فإن محور السينات يقسم أب بنسبة ....
(١ : ٢ أ، ٢ : ١ أ، ٤ : ٣ أ، ٢ : ٣)

(٣) إذا كان ك‖٤ أ‖ = ‖−٣ أ‖ ، فإن ك = ...
($\frac{٤}{٣}$ أ، $\frac{-٣}{٤}$ أ، $\frac{٣}{٤}$ أ، −٤ ...)

(٤) إذا كان المستقيمان ل١ ، ل٢ هما على الترتيب ٢س − ٣ص + ١ = ٠ ، ٣س + ب ص − ٦ = ٠ ، متعامدان فإن ب = ...

(−٢ أ، ٢ أ، $\frac{-٩}{٢}$ أ، $\frac{٩}{٢}$)

(ب) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ٢) على المستقيم الذى معادلته ٥س − ١٢ص − ٧ = ٠

(جـ) إذا كان ل١ : ٣س + ٢ص − ٧ = ٠ ، ل٢ : ٢س − ٣ص + ٤ = ٠
أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع المستقيمين ل١ ، ل٢ والنقطة (٣ ، ٤)

---

❸ (أ) أكمل ما يأتى :

(١) المعادلة الكارتيزية للمستقيم الذى يقطع المحورين السينى والصادى جزأين موجبين مقدارهما ٢ ، ٣ على الترتيب هى ....

(٢) إذا كان المستقيم : أس − ٤ص + ٥ = ٠ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية ظلها ٠,٧٥ ، فإن قيمة أ = ...

(٣) إذا كان : و$\overline{أ}$ = (٨ ، ٨$\sqrt{٣}$) ، فإن الصورة القطبية للمتجهة و$\overline{أ}$ = ...

(٤) إذا كان : $\overline{أ}$ = (٦ ، −٢) ، $\overline{ب}$ = (٤ ، ٣) ،
فإن : ٢$\overline{أ}$ − ٣$\overline{ب}$ = ...

(ب) فى Δ أ ب جـ ، ء ∈ $\overline{ب جـ}$ حيث ب ء : ء جـ = ٣ : ٢
أثبت أن : ٢$\overline{أب}$ + ٣$\overline{أجـ}$ = ٥$\overline{أء}$

(جـ) أوجد المعادلة الكارتيزية للمستقيم المار بالنقطة (٣ ، −٥) ويوازى المستقيم : س + ٢ص − ٧ = صفر

المرشد

مراجعة نهائية

أجب عن الأسئلة الآتية :

❶ اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(أ) البعد بين المستقيمين ص − ٣ = صفر ، ص + ٢ = صفر يساوى ....
(١ أ، ٢ أ، ٣ أ، ٥)

(ب) إذا كان $\overline{أ}$ // $\overline{ب}$ حيث $\overline{أ}$ = (−٤ ، −٣) ، $\overline{ب}$ = (٨ ، ك) فإن قيمة ك = ...
(٦ أ، −٦ أ، ٨ أ، −٨)

(جـ) المعادلة الكارتيزية للمستقيم الذى يمر بالنقطة (٣ ، ٥) يوازى محور السينات هى ....
(س = ٣ أ، ص = ٥ أ، ص = ٣ أ، ص = ٥)

(ء) أ ب جـ مثلث فيه أ(صفر ، ٨) ، ب (٣ ، ٢) ، جـ (−٣ ، ٥) فإن إحداثى نقطة تلاقى المتوسطات هى ....
((صفر ، $\frac{٥}{٢}$) أ، (٥ ، صفر) أ، (صفر ، ٥) أ، ($\frac{٥}{٢}$ ، صفر))

أجب عن سؤالين فقط مما يأتى :

❷ (أ) إذا كانت : أ(٣ ، ١) ، ب (−٢ ، ٥) ،
أوجد إحداثيات النقطة جـ التى تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ٢ : ٣

(ب) أوجد المعادلة المتجهة للخط المستقيم الذى ميله $\frac{١}{٣}$ ويمر بالنقطة (٢ ، −١)

---

❸ (أ) أ ب جـ ء متوازى أضلاع حيث أ (٢ ، −١) ، ب (٧ ، ١) ، جـ (٤ ، ٤)
أوجد إحداثى نقطة ء .

(ب) أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين.
٣س − ٤ص − ١١ = صفر ، س + ٧ص + ٥ = صفر

---

❹ (أ) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة جـ(٢ ، −١)ويمر بنقطة تقاطع المستقيمين ٧س + ص + ٣ = صفر ، ٥س − ص − ٣ = صفر.

(ب) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٥ ، ٢) إلى الخط المستقيم المار بالنقطتين (صفر ، −٣) ، (٤ ، صفر).

(٧) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة القليوبية الأزهرية) ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

أجب عن الأسئلة الآتية :

❶ **أكمل ما يأتى :**

(أ) إذا كان المستقيمان ٣س − ٢ص + ٧ = ٠ ، أس + ٣ص + ٥ = ٠

متعامدين فإن أ = ...

(ب) المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة (٢ ، −٣) ومتجه الاتجاه له

(٣ ، ٤) هى ....

(جـ) إذا كان : أ⃖ = (٦ ، −٢) ، ب⃖ = (٤ ، ٣) فإن ‖ ٢أ⃖ − ٣ب⃖ ‖ = ...

(د) إذا كان ر⃖ = (٠ ، −٢) + ك(٣ ، −١) ، ر⃖ = (٠ ، ٥) + ك(١ ، ٢)

فإن قياس الزاوية الحادة بينهما = ... °

أجب عن سؤالين فقط مما يأتى :

❷ (أ) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ٢) على الذى معادلته :

٥س − ١٢ص −٧ = صفر

(ب) إذا كانت أ = (٢ ، −١) ، ب = (−٣ ، ٤) أوجد إحداثى النقطة جـ

التى تقسم أب من الداخل بنسبة ٣ : ٢

❸ (أ) أوجد المعادلتين البارامتريتين للمستقيم الذى يمر بالنقطة (٣ ، −٤)

ويصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

(ب) إذا كان أ = (٣ ، ٤) ، ب = (٥ ، −١) ، جـ = (٢ ، −٢) هى رؤوس

متوازى أضلاع أ ب جـ د أوجد إحداثى الرأس د.

❹ (أ) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة أ(−٢ ، ٤) وبنقطة تقاطع المستقيمين :

ل₁ : ر⃖ = (−١ ، ٣) + ك(٢ ، −١) ،

ل₂ : ٢س − ٣ص + ٤ = صفر

(ب) أ ب جـ مثلث فيه أ(٠ ، ٥) ، ب(٢ ، −١) ، جـ (٦ ، ٣)

أثبت أن المثلث متساوى الساقين ، وأحسب ق(أ) بالدرجات.

أجب عن الأسئلة الآتية :

❶ **أكمل ما يأتى :**

(أ) إذا كان المستقيمان : ٣س − ٢ص + ٧ = صفر ،

أس + ٣ص + ٥ = صفر ، متعامدان فإن أ = ...

(ب) المستقيم س/٤ − ص/٣ = ١ يقطع محور الإحداثيات فى أ ، ب فإن

مساحة ∆ و أ ب = ... وحدة مربعة

(جـ) المتجه م⃖ = (١٢√٢ ، π/٤) يعبر عنه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين

بالصورة م⃖ = ...

(د) إذا كانت ع⃖ = ١٢ ى⃖ ، ع⃖ب = −٨ ى⃖ فإن ع⃖أب = ... ى⃖

أجب عن سؤالين فقط مما يأتى :

❷ (أ) أ ب جـ د شكل رباعى فيه : ب⃖جـ = ٣ أ⃖د

برهن أن أ ب جـ د شبه منحرف ، أ⃖جـ + ب⃖د = ٤ أ⃖د

(ب) إذا كان أ (−١ ، ٤) ، ب (١ ، ٢) ، جـ (٥ ، −٢) أوجد النسبة التى

تقسم بها النقطة ب القطعة أجـ مبينًا نوع التقسيم.

❸ (أ) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٨ ، −٢) على المستقيم :

ر⃖ = (٠ ، ١/٣) + ك (−٣ ، ٤)

(ب) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٧ ، ٤)

وموازيًا للمستقيم الذى معادلته ٣س = ٢ص

❹ (أ) أوجد قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيم س − ٢ص + ٣ = ٠

والمستقيم المار بالنقطتين (٤ ، −١) ، (٢ ، ١)

(ب) إذا كان : أ⃖ = (٤ ، −٦) ، ب⃖ = (−٦ ، ٩) ، جـ⃖ = (−٣ ، −٢)

فأوجد ‖ ١/٢ أ⃖ + ب⃖ − ٣جـ⃖ ‖

(٩) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة الغربية الأزهرية) ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

أجب عن الأسئلة الآتية :

❶ **أكمل ما يأتى :**

(أ) إذا كانت أ = (٦ ، ٣) ، ب = (٣ ، -١) فإن ‖أب‖ = ...

(ب) قياس الزاوية بين المستقيمين س - ٧ = ٠ ، ص = ٣ يساوى ....

(جـ) المتجه وَ = (٨ ، ٨) فى الصورة القطبية = ...

(ء) معادلة المستقيم المار بالنقطة (٥ ، -٤) ويوازى محور السينات هى ....

أجب عن سؤالين فقط مما يأتى :

❷ (أ) أ ب جـ مثلث فيه ء ∈ ب جـ بحيث ٢ ب ء = ٣ ء جـ

أثبت أن : ٢ أب + ٣ أجـ = ٥ أء

(ب) أثبت أن المستقيمين ل١ : ٣س - ٤ص = ٦ ، ل٢ : ٨ص - ٦س - ١٣ = ٠

متوازيان وأوجد البعد بينهما

❸ (أ) أوجد إحداثى النقطة التى تقسم أب من الخارج بنسبة ٥ : ٣ حيث :

أ = (-٤ ، ١) ، ب = (-٢ ، ٣)

(ب) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : س - ص + ٢ = ٠

٢س + ص = ٨ ويمر بالنقطة (٣ ، ٤)

(١٠) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة البحيرة الأزهرية) ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

أجب عن الأسئلة الآتية :

❶ **أكمل ما يأتى :**

(أ) إذا كان المستقيمان ٣س - ٢ص + ٧ = ٠ ، أس - ٣ص + ٥ = ٠

متعامدان فإن أ = ...

(ب) قوة مقدارها ٢٠ ث.كجم تؤثر على جسم فى اتجاه ٣٠° جنوب الشرق فإن

قَ = ... سَ + ... صَ

...... = ‖ -٤ أ‖ = ٤ ‖ك أ‖ فإن ك = ...

(جـ) إذا كان ‖-٤ أ‖ = ٤ ‖ك أ‖ فإن ك = ...

(ء) إذا كانت أ (-٣ ، ٤) ، ب (٦ ، -٨) فإن محور السينات يقسم أب

من .... بنسبة ..... : .....

أجب عن سؤالين فقط مما يأتى :

❷ (أ) أثبت أن المستقيمين : رَ = (٠ ، ٤) + ك(١ ، -٢) ، ٢س + ص + ٢ = ٠

متوازيان ، ثم أوجد أقصر بعد بينهما.

(ب) أ ب جـ ء شكل رباعى فيه ب جـ = ٣ أ ء أثبت أن :

(١) أ ب جـ ء شبه منحرف. (٢) أجـ + ب ء = ٤ أ ء

❸ (أ) إذا كان قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين س - ك ص - ٨ = ٠

٢س - ص - ٥ = ٠ يساوى $\frac{\pi}{4}$ فأوجد قيمة ك.

(ب) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٣ ، -٤)

ويصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

❹ (أ) دائرة مركزها نقطة الأصل . أثبت أن الوترين المرسومين فى دائرة

واللذان معادلتهما :

٣س + ٤ص + ١٠ = ٠ ، ٥س - ١٢ص + ٢٦ = ٠

متساويان فى الطول.

(ب) أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع المستقيمين :

٢س + ص = ٥ ، س + ٥ص = ١٦

وعموديًا على المستقيم س - ص = ٨

(١١) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة أسيوط الأزهرية) ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

أجب عن الأسئلة الآتية :

❶ **أكمل ما يأتى :**

(أ) الصورة الإحداثية للمتجه أ = (٦ ، $\frac{\pi}{3}$) هى ....

(جـ) لأى مثلث ا ب جـ يكون $\overrightarrow{اب} + \overrightarrow{بجـ} + \overrightarrow{اجـ} =$ ....

(ء) ا ب جـ ∆ فيه ا (٢ ، ١) ، ب (١ ، ٥) ، جـ (٦ ، –٣) فإن إحداثى نقطة تلاقى متوسطاته ....

أجب عن سؤالين فقط مما يأتى :

❷ (أ) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (–٢ ، –٥) والمتجه $\overrightarrow{ى}$ (٣ ، ١) متجه اتجاه له.

(ب) إذا كانت ا (١ ، –٤) ، ب (٦ ، ٦) أوجد إحداثى جـ التى تقسم $\overline{اب}$ من الداخل بنسبة ٣ : ٢

❸ (أ) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٣ ، ٥) إلى المستقيم :

$\overrightarrow{ر}$ = (–١ ، ٢) + ك (٤ ، –٣)

(ب) أوجد الصورة القطبية لمتجه الموضع و$\overrightarrow{ا}$ حيث و$\overrightarrow{ا}$ = (٤ ، ٤$\sqrt{٣}$)

❹ (أ) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين ٢س + ص = ٨ ، س – ص –١ = ٠ يوازى محور الصادات.

(ب) إذا كان ك ‖٤$\overrightarrow{ا}$‖ = ‖–٣$\overrightarrow{ا}$‖ أوجد ك

(١٢) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة القاهرة الأزهرية) ١٤٣٨هـ/٢٠١٧م

• **أجب عن السؤال الآتى (إجباريا) :**

❶ **أكمل ما يأتى :**

(أ) البعد بين المستقيمين : ص – ٣ = ٠ ، ص + ٢ = ٠ يساوى ....

(ب) إذا توازى المستقيمان : أس + ٣ص – ٧ = ٠ ، ٢س + ٣ص – ٥ = ٠ فإن أ = ...

(جـ) معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة الأصل ونقطة تقاطع المستقيمين : س = ٣ ، ص = ٣ هى ....

(ء) إذا كانت النقطة (٣ ، ٦) هى نقطة تنصيف $\overline{اب}$ حيث ا = (–٣ ، ٧) فإن إحداثى نقطة ب = (..... ، .....)

أجب عن سؤالين فقط مما يأتى :

❷ (أ) إذا كانت نقطة جـ (٢ ، ٥) تقسم $\overline{اب}$ من الداخل بنسبة ٤ : ١ وكانت ا (٨ ، ٣) ، فأوجد إحداثى نقطة ب

(ب) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ١) إلى المستقيم س + ص = ٠ .

❸ (أ) أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

$ل_١$: ٣س + ٤ص – ١١ = ٠ ، $ل_٢$: س + ٧ص + ٥ = ٠ .

(ب) إذا كان المستقيم يمر بالنقطة و(–٣ ، ٥) والمتجه (–١ ، ٢) عمودى عليه فأوجد :

(١) المعادلة المتجهة للمستقيم . (٢) المعادلة الكارتيزية للمستقيم .

❹ (أ) أوجد طولى الجزئين المقطوعين من المحورين بالمستقيم :

٣س + ٤ص – ١٢ = ٠ .

(ب) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة ا(–٢ ، ٤) ونقطة تقاطع المستقيمين :

س + ٢ص – ٥ = ٠ ، ٢س – ٣ص + ٤ = ٠ .

(١٣) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة الغربية الأزهرية) ١٤٣٨هـ/٢٠١٧م

• **أجب عن الأسئلة الآتية :**

❶ **أكمل ما يأتى :**

(أ) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

س – ٣ص + ٥ = ٠ ، س + ٢ص – ٧ = ٠ يساوى ....

(ب) إذا كان : $\overrightarrow{ا}$ = (١ ، –١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٤ ، –٥) فإن ‖$\overrightarrow{اب}$‖ = ...

(جـ) إذا كان : ‖٣ ك $\overrightarrow{ا}$‖ = ‖–١٢ $\overrightarrow{ا}$‖ فإن ك = ...

(ء) المتجه $\overrightarrow{م}$ = (١٢$\sqrt{٢}$ ، $\frac{\pi}{٤}$) يعبر عنه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين بالصورة ....

❷ (أ) إذا كان : $\overrightarrow{ا}$ = (٣ ، –١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٦ ، ك)

أوجد قيمة ك إذا كان : (١) $\overrightarrow{ا}$ // $\overrightarrow{ب}$ (٢) $\overrightarrow{ا}$ ⊥ $\overrightarrow{ب}$

(ب) اب جـ مثلث أخذت ء ∈ بجَ بحيث ٢ ب ءَ = ٣ ء جـَ

أثبت أن : ٢ اَبَ + ٣ اَجـَ = ٥ اَءَ

❷ (أ) أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٥) ويوازى المستقيم :

٣س = ٤ص − ١

(ب) أثبت أن المستقيمين : رَ = (٠ ، ٧/٢) + ك(٣ ، ٤) ،

٤س − ٣ص + ١٧ = ٠ متوازيان ، وأوجد البُعد بينهما

(١٤) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة الشرقية الأزهرية) ١٤٣٨هـ/٢٠١٧م

• أجب عن ثلاثة أسئلة فقط على أن يكون السؤال الأول إجباريًا :

❶ أكمل ما يأتى :

(أ) إذا كان اَ = ٢سَ + ٣صَ ، بَ = ٣سَ − ٢صَ

فإن ٢ اَ − بَ = ...

(ب) إذا كان : اَ = (−٢ ، ١) ، جـَ = (−٣ ، ك) متوازيين

فإن ك = ...

(جـ) طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ١) إلى المستقيم س + ص = صفر

يساوى ....

(ء) فى Δ اب جـ يكون اَبَ + بَجـَ + اَجـَ يساوى ....

❷ (أ) أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة (−١ ، ٠) وبنقطة تقاطع المستقيمين : ٢س − ص + ٤ = ٠ ، س + ص + ٥ = ٠

(ب) إذا كان اَ = (٢ ، ٥) ، بَ = (ك ، −٤) أوجد قيمة ك إذا كان :

(١) اَ // بَ (٢) اَ ⊥ بَ

(أ) مستقيم يمر بالنقطة (١ ، −١) ، ىَ = (٢ ، ١) متجه اتجاه له ،

أوجد الصورة المتجهة للمستقيم ، الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم.

(ب) إذا كانت : ا = (−١ ، ٤) ، ب = (٥ ، −١) ،

أوجد إحداثى نقطة جـ التى تقسم اَبَ من الداخل بنسبة ١ : ٢

(أ) دائرة مركزها نقطة الأصل ، أثبت أن الوترين المرسومين فى الدائرة واللذان معادلتاهما : ٣س + ٤ص + ١٠ = ٠ ، ٥س − ١٢ص + ٢٦ = ٠

متساويان فى الطول .

(ب) أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

ل١ : س − ٢ص + ١ = ٠ ، ل٢ : ٢س − ٦ص + ٥ = ٠

(١٥) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة البحيرة الأزهرية) ١٤٣٨هـ/٢٠١٧م

• أجب عن السؤال الآتى (إجباريًا) :

❶ أكمل ما يأتى :

(أ) إذا كان : اَ = −٤سَ + ٢صَ ، بَ = (١ ، ٣)

فإن : اَ + ٣ بَ = (...... ، ......)

(ب) قياس الزاوية بين المستقيمين اللذين ميلاهما ١/٢ ، −٢ يساوى ....

(جـ) المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بالنقطة (٢ ، −٣) ومتجه الاتجاه له (٣ ، ٤) هى ....

(ء) طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ١) إلى المستقيم س + ص = ٠

يساوى ....

• أجب عن سؤالين فقط مما يأتى :

❷ (أ) إذا كان : ك ‖ ٤اَ ‖ = ‖ −٣ اَ ‖ فأوجد قيمة ك

(ب) إذا كانت : ا = (−١ ، ٤) ، ب = (٥ ، −١)

أوجد إحداثى نقطة جـ التى تقسم اَبَ من الداخل بنسبة ١ : ٢

❸ (أ) إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين : ٣س − ٥ص − ١ = ٠ ،

ك س − ص − ٣ = ٠ يساوى ٤٥° ، أوجد قيمة ك

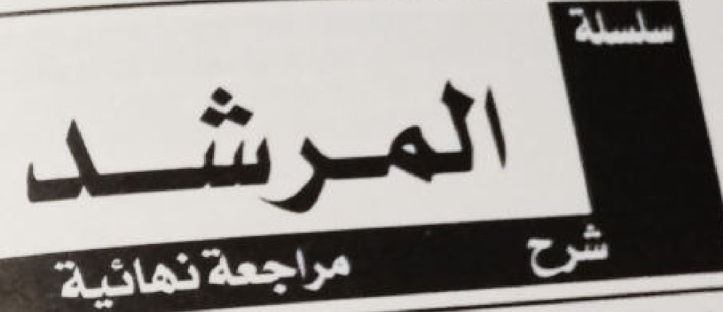
(ب) أثبت أن المستقيمين : رَ = (٠ ، ٤) + ك(١ ، −٢) ،

٢س + ص + ٢ = ٠ متوازيان ، ثم أوجد أقصر بُعد بينهما

❹ (أ) إذا كانت: أ(٣ ، ٥) ، ب(-١ ، م) ، ‖أب‖ = ٤ فأوجد قيمة م

(ب) أ ب جـ ء شكل رباعى ، هـ منتصف أب ، و منتصف جـ ء

أثبت أن: ب جـ + أ ء = ٢ هـ و



سلسلة المرشد لجميع صفوف الثانوية الأزهرية

المواد العربية	المواد الثقافية	المواد الثقافية	المواد الشرعية
	القسم العلمى	القسم الأدبى	
ـحو	رياضيات	جغرافيا	توحيد
ـرف	فيزياء	تاريخ	حديث
ـلاغة	كيمياء	منطق	تفسير
ـدب	أحياء	فرنساوى	فقه
ـوص	إنجليزى	إنجليزى	ميراث
ـالعة	مستوى رفيع	مستوى رفيع	منطق
ـروض		علم نفس	
		فلسفة	

المرشد

فى المراجعة العامة والنهائية فى الرياضيات

إرشادات امتحانات الجبر وحساب المثلثات والهندسة التحليلية



للصف الأول الثانوى

الفصل الدراسى الثانى

إعداد

سعيد جودة

حلول امتحانات الجبر وحساب المثلثات

(١) امتحان منطقة القاهرة ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

(١) (أ) (١) جا هـ = $-\sqrt{3}$ جتا هـ

$\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}} = -\sqrt{3}$ ∴ ظا هـ = $-\sqrt{3}$

السالب يدل على الربع إما الثاني أو الرابع

لكن شرط المسألة ١٨٠° < θ < ٣٦٠°

هـ تقع في الربع الرابع

ق(هـ) = ٣٠٠°

(٢) ا ب جـ ٤

= (١ + ت) × (١ − ت) جا هـ

= (١ − ت²) جا هـ = ٢ جا هـ = ١

جا هـ = $\frac{1}{2}$ ∴ ق(هـ) = ٣٠°

(٣) س⁻¹ = $\frac{1}{\Delta}$ $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

Δ = $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$ = −٩ − (−٨) = −١

س⁻¹ = $\frac{1}{-1}$ $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

(٤) مساحة القطاع

= $\frac{\text{هـ}°}{360}$ × مساحة سطح الدائرة

= $\frac{\pi}{360}$ × π × ٣٦

= ٣٦ π وحدة مربعة

= ١٨,٨٥ وحدة مربعة

(٥) $\begin{vmatrix} ١ + \frac{١}{ت} & ١ \\ ١ & ١ + \frac{١}{ت} \end{vmatrix}$ = ١٥

∴ $(1 + \frac{1}{ت})^2 - 1 = 15$

ت² + $\frac{1}{ت^2}$ + ٢ − ١ = ١٥

ت² + $\frac{1}{ت^2}$ = ١٤

(ب) ل₁ : ٢ص − ٣س = ٠

س	٠	١
ص	٠	$\frac{3}{2}$

(١ ، ٠) لا تحقق المتباينة

∴ الحل كما في الرسم

ل₂ : −٣س + ٢ص = −٦

س	٠	٢
ص	−٣	٠

(٠ ، ٠) ∉ حل المتباينة

ملحوظة م₁ = $\frac{3}{2}$ ، م₂ = $\frac{3}{2}$

∴ م₁ = م₂ ∴ المستقيمان متوازيان

∴ مجموعة الحل = ∅

(جـ) باعتبار أن جـ هو الشخص من

س هو البعد بين النقطة والراصد

∴ جا ٦٣ = $\frac{2.56}{\text{س}}$

∴ س = $\frac{2.56}{\text{جا } 63}$ = ٢,٨٧٣ كم ≃ ٢٨٧٣ متر

(٤-١) حل للمتباينتين

(١) (١) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ =

بفرض أن المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & ٤ \end{pmatrix}$

أ^مد = $\begin{pmatrix} أ & جـ \\ ب & ٤ \end{pmatrix}$

أ + أ^مد =

= $\begin{pmatrix} ٢أ & ب + جـ \\ ب + جـ & ٢٤ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

∴ ٢أ = ١ ، ∴ أ = $\frac{1}{2}$ ، ب + جـ = ٠

٢٤ = ١ ∴ ٤ = $\frac{1}{2}$

عناصر المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & جـ \\ ب & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

∴ المجموع لهذا العناصر

= $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ + ب + جـ = ١

حيث ب + جـ = صفر

(٤) بفرض أن بعد القسمة على ٥ المتساوية الأولى التي ستكون على شكل :

$\frac{3}{5}$ جا θ + $\frac{4}{5}$ جتا θ = ١

بفرض أن جا β = $\frac{3}{5}$ ∴ جتا β = $\frac{4}{5}$

∴ الشكل يصبح :

جا β جا θ + جتا β جتا θ = ١

من قانون جيب التمام

∴ الطرف الأيمن يصبح جتا (β − θ) = ١

∴ β − θ = صفر ∴ β = θ

∴ المطلوب ٣ جتا θ − ٤ جا θ

= ٣ × $\frac{4}{5}$ − ٤ × $\frac{3}{5}$ = صفر

ملحوظة : رقم (٣) ، (٤) من مسائل المتفوقين جدا

(٥) ∵ ق(ب جـ أ) المحيطية = ٣٠°

∴ ق(ب م أ) المركزية المشتركة مع القوس ب أ

= ٦٠°

∵ م ب = م أ

، ق(ب م أ) = ٦٠°

∴ المثلث متساوى الأضلاع

∴ نق = ٧ سم

∴ مساحة القطعة الدائرية

= $\frac{1}{2}$ نق² (θ^د − جا θ)

∵ جا θ = جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

∵ θ^د = $\frac{60}{180}$ × π = $\frac{\pi}{3}$

∴ مساحة القطعة الدائرية

= $\frac{1}{2}$ نق² (θ^د − جا θ)

= $\frac{1}{2}$ × ٤٩ ($\frac{\pi}{3}$ − $\frac{\sqrt{3}}{2}$) ≃ ٤,٤ سم²

(ب) بالضرب في الطرف الأيمن

$\begin{pmatrix} ٢س + ٩ & ١٤ + ٣ص \\ ٥س + ١٥ & ٢٨ + ٥ص \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 11 & 18 \end{pmatrix}$

بالمقارنة :

٢س + ٩ = ٧ ∴ س = −١

١٤ + ٣ص = ٨ ∴ ص = −٢

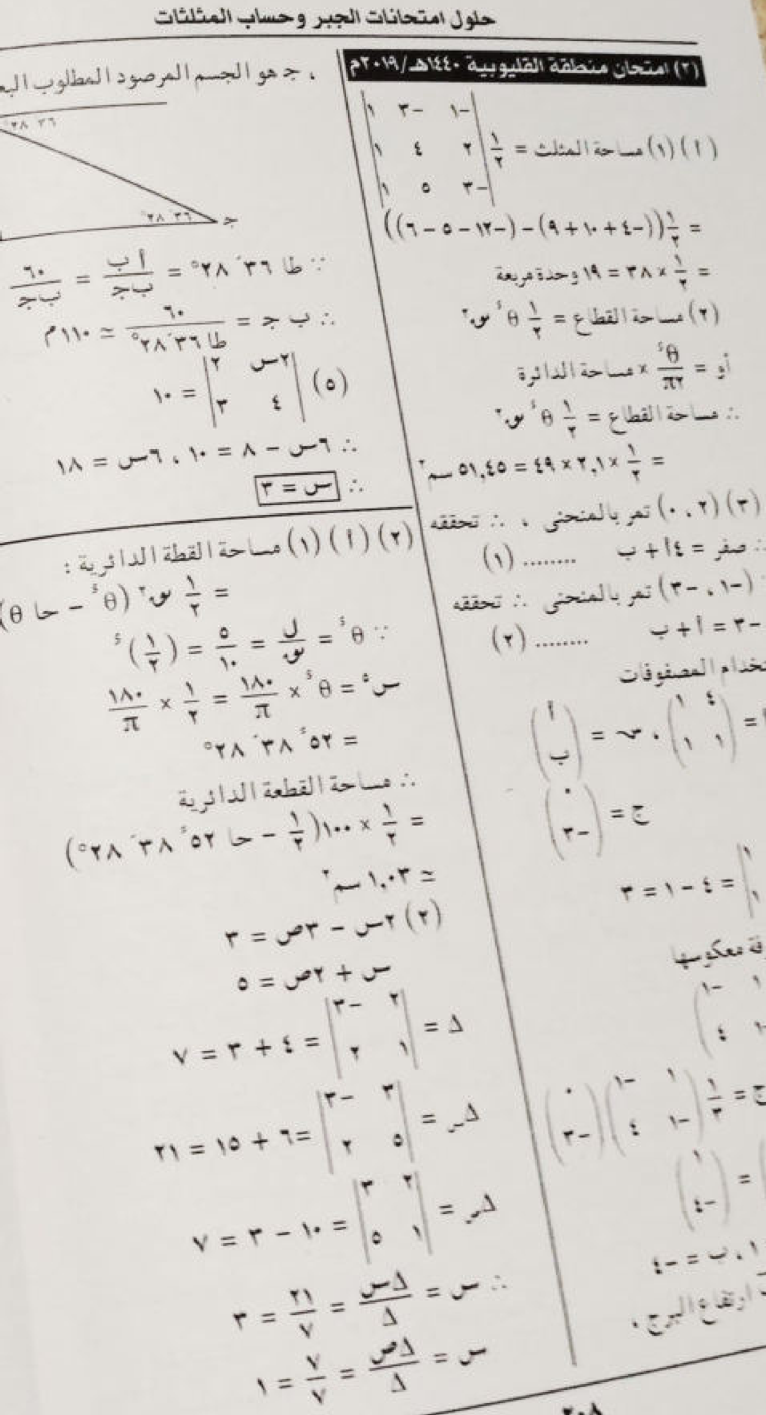
∴ قيمة س = −١ ، قيمة ص = −٢

(جـ) الطرف الأيمن

= $\dfrac{\dfrac{\text{جا}\theta\ \text{جا}\theta}{\text{جا}\theta}}{\dfrac{\text{جا}\theta}{\text{جا}\theta}} + \dfrac{\dfrac{\text{جا}\theta}{\text{جا}\theta}}{\dfrac{1}{\text{جا}\theta} \times \dfrac{1}{\text{جا}\theta}}$

= جتا² θ + جا² θ = ١

= الطرف الأيسر



(٢) امتحان منطقة القليوبية ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

(أ) (١) مساحة المثلث $= \frac{١}{٢}\begin{vmatrix} -١ & -٣ & ١ \\ ٢ & ٤ & ١ \\ -٣ & ٥ & ١ \end{vmatrix}$

$= \frac{١}{٢}\left((-٤ + ١٠ + ٩) - (-١٢ - ٥ - ٦)\right)$

$= \frac{١}{٢} \times ٣٨ = ١٩$ وحدة مربعة

(٢) مساحة القطاع $= \frac{١}{٢}\,\theta^{ء}\,نق^{٢}$

أو $= \frac{\theta^{ء}}{٢\pi} \times$ مساحة الدائرة

∴ مساحة القطاع $= \frac{١}{٢}\,\theta^{ء}\,نق^{٢}$

$= \frac{١}{٢} \times ٢,١ \times ٤٩ = ٥١,٤٥$ سم²

(٣) (٠ ، ٢) تمر بالمنحنى ∴ تحققه

∴ صفر = ٤أ + ب .... (١)

∵ (-١ ، -٣) تمر بالمنحنى ∴ تحققه

∴ -٣ = أ + ب .... (٢)

باستخدام المصفوفات

ضع $أ = \begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ ، $س = \begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix}$

$ج = \begin{pmatrix} ٠ \\ -٣ \end{pmatrix}$

$\Delta = \begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = ٤ - ١ = ٣$

∴ المصفوفة معكوسها

$أ^{-١} = \frac{١}{٣}\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix}$

∴ $س = أ^{-١}\,ج = \frac{١}{٣}\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٠ \\ -٣ \end{pmatrix}$

∴ $س = \begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ -٤ \end{pmatrix}$

أكمل ستجد أ = ١ ، ب = -٤

(٤) بفرض أن $\overline{أب}$ ارتفاع البرج ،

، جـ هو الجسم المرصود المطلوب البعد $\overline{ب جـ}$

∵ طا ٣٦َ ٢٨° $= \frac{أ ب}{ب جـ} = \frac{٦٠}{ب جـ}$

∴ ب جـ $= \frac{٦٠}{طا ٣٦َ ٢٨°} \simeq ١١٠$م

(٥) $\begin{vmatrix} ٢س & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix} = ١٠$

∴ ٦س − ٨ = ١٠ ، ٦س = ١٨

∴ **س = ٣**

(٢) (أ) (١) مساحة القطعة الدائرية :

$= \frac{١}{٢}\,نق^{٢}\,(\theta^{ء} - حا\,\theta)$

∵ $\theta^{ء} = \frac{ل}{نق} = \frac{٥}{١٠} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{ء}$

$س^{°} = \theta^{ء} \times \frac{١٨٠}{\pi} = \frac{١}{٢} \times \frac{١٨٠}{\pi}$

= ٥٢ً ٣٨َ ٢٨°

∴ مساحة القطعة الدائرية

$= \frac{١}{٢} \times ١٠٠\left(\frac{١}{٢} - حا\ ٥٢ً\ ٣٨َ\ ٢٨°\right)$

≃ ١,٠٣ سم²

(٢) ٢س − ٣ص = ٣

س + ٢ص = ٥

$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٤ + ٣ = ٧$

$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٣ & -٣ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} = ٦ + ١٥ = ٢١$

$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٥ \end{vmatrix} = ١٠ - ٣ = ٧$

∴ $س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{٢١}{٧} = ٣$

$ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{٧}{٧} = ١$

مجموعة الحل = {(٣ ، ١)}

(٣) ∵ س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

∴ الحل يقع فى الربع الأول

ل١ : ٣س + ص = ١٥

(٠ ، ٠) ∉ مجموعة حل المتباينة .

ل١ : ٣س + ص ≥ ١٥

س	٠	٥
ص	١٥	٠

ل٢ : ٤س + ٣ص ≥ ٢٤

س	٠	٦
ص	٨	٠

(٠ ، ٠) ∉ مجموعة حل المتباينة :

٤س + ٣ص ≥ ٢٤

لإيجاد النقطة يوجد على الرسم ثلاث نقاط

أ = (٦ ، ٠) ، جـ = (٠ ، ٨)

∵ ء هى نقطة تقاطع المستقيم

٣س + ص = ١٥ ، ٤س + ٣ص = ٢٤

∴ نقطة التقاطع : ء = $\left(\frac{٢١}{٥} ، \frac{١٢}{٥}\right)$

ر(٦ ، ٠) = ٣ × ٠ + ٢ × ٦ = ١٢

ر(٠ ، ٨) = ٣ × ٨ + ٢ × ٠ = ٢٤

ر$\left(\frac{٢١}{٥} ، \frac{١٢}{٥}\right) = ٣ \times \frac{١٢}{٥} + ٢ \times \frac{٢١}{٥}$

$= \frac{٧٨}{٥} = ١٥\frac{٣}{٥}$

أقل ما يمكن عند (٦ ، ٠)

(٤) ∵ $أب = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & -١ & ٤ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{pmatrix}$

$أب = \begin{pmatrix} ٣ + ٢ & -٣ + ١ & ١٢ + ٣ \\ ٢ + ١٠ & -٢ + ٥ & ٨ + ١٥ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٥ & -٢ & ١٥ \\ ١٢ & ٣ & ٢٣ \end{pmatrix}$

∵ ٢ سمد $=$ أب $+ \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ٣ \\ -٢ & ١ & -٣ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٨ & ٠ & ١٨ \\ ١٠ & ٤ & ٢٠ \end{pmatrix}$

∵ سمد $= \begin{pmatrix} ٤ & ٠ & ٩ \\ ٥ & ٢ & ١٠ \end{pmatrix}$

∴ $س = \begin{pmatrix} ٤ & ٥ \\ ٠ & ٢ \\ ٩ & ١٠ \end{pmatrix}$

(٥) المعادلة : ٤ حا²θ − ٣ حا θ حتا θ = صفر

حا θ (٤حا θ − ٣ حتا θ) = صفر

∴ حا θ = صفر أ، ٤ حا θ = ٣ حتا θ

ق(θ̂) = {٠ ، ١٨٠° ، ٣٦٠°} | ∴ طا θ = $\frac{٣}{٤}$ ، ق(θ̂) = ١٢ً ٥٢َ ٣٦°

مجموعة الحل

= {٠ ، ١٨٠° ، ٣٦٠° ، ١٢ً ٥٢َ ٣٦°}

(٣) امتحان منطقة المنوفية ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

(أ) (١) $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ -٢ & س \end{pmatrix} = I$

∴ $\begin{pmatrix} ٣ - ٢ & -٣ + س \\ ٢ - ٢ & -٢ + س \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} ١ & -٣ + س \\ ٠ & -٢ + س \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

-٣ + س = ٠ ⇐ ∴ **س = ٣**

-٢ + س = ١ ⇐ ∴ **س = ٣**

(٢) $جا^{٢} θ + جا^{٢} θ\ ظا^{٢} θ$

$= جا^{٢} θ (١ + ظا^{٢} θ)$

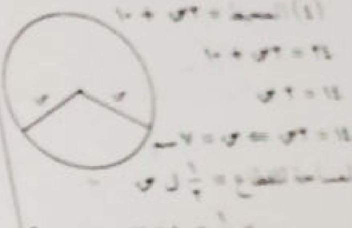
$= جا^{٢} θ × قا^{٢} θ = \frac{جا^{٢} θ}{جتا^{٢} θ} = ظا^{٢} θ$

(٣) النقطة (٤ ، ٣) لا تحقق ص < ٣

النقطة (٢ ، ٣) لا تحقق ص < ٣

(٣ ، ١) لا تحقق س + ص > ٤

التي تحقق كل المتباينات هي (٢ ، ٣)



(٤) المحيط = ٢نق + ١٠

٢٤ = ٢نق + ١٠

١٤ = ٢نق

١٤ = ٢نق ⇐ نق = ٧ سم

المساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل نق

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ٧ = ٣٥ سم^{٢}

(ب) $(أ\ ب)^{-١} = \begin{pmatrix} -٢ & ٣ \\ -٤ & ١ \end{pmatrix}$

$((أ + ب)^{-١})^{-١} = \begin{pmatrix} -٢ & ٣ \\ -٤ & ١ \end{pmatrix}^{-١}$

$(أ + ب) = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ -٤ & -٢ \end{pmatrix}$

ب = (أ + ب) − (أ)

$= \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ -٤ & -٢ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -٣ & ١ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$

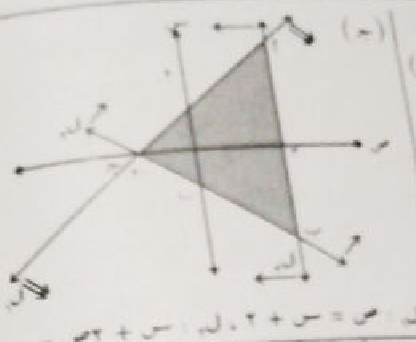
$= \begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ -٦ & -١ \end{pmatrix}$

$أ\ ب = \begin{pmatrix} -٣ & ١ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ -٦ & -١ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ١٨ + ٤ & ٣ + ٢ \\ -١٢ - ٤ & ٢ - ٢ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٢٢ & ٥ \\ -١٦ & -٤ \end{pmatrix}$

(جـ)



ل١ : ص = س + ٢ ، ل٢ : س + ٢ص = −٢

س	٠	−٢	س	٠	−٢
ص	٢	٠	ص	−١	٠
(٠ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة ل١			(٠ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة ل٢		

المثلث أ ب جـ هو الجزء المظلل هو حل المتباينات

حيث جـ = (−٢ ، ٠)

أ = (٣ ، ٥) ، ب = $(٣ ، \frac{-٥}{٢})$

(٢) (أ) (١) ∵ $(أ\ ب^{ـ})^{ـ} = (ب^{ـ})^{ـ} أ^{ـ}$

$= ب\ أ^{ـ}$

(٢) مساحة القطعة الدائرية

= $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} (θ^{ء} − جا θ)

(٣) سبق حلها في القليوبية جـ ١ (١)

(٤) جتا (٩٠ − θ) = ١ ⇐ جا θ = ١

∴ ق(θ̂) = $\frac{π}{٢}$

∴ الحل العام للمعادلة = $\frac{π}{٢}$ + ٢πن

حيث ن ∈ ص

(ب) س + ٣ص = ٥ ، ٢س + ٥ص = ٨

المعادلات الصورة أ س = جـ

حيث أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$ ، س = $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$

جـ = $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٨ \end{pmatrix}$

∵ محدد المصفوفة أ = $\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix}$ = ٥ − ٦ = −١

∴ المصفوفة لها معكوس

$أ^{-١} = \frac{١}{-١} \begin{pmatrix} -٣ & ٥ \\ ١ & -٢ \end{pmatrix}$

$أ^{-١} = \begin{pmatrix} ٣ & -٥ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$ ∴ س = $أ^{-١}$ جـ

س = $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & -٥ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٥ \\ ٨ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٢٤ + -٢٥ \\ ٨ - ١٠ \end{pmatrix}$

∴ س = −١ ، ص = ٢

∴ مجموعة الحل = {(−١ ، ٢)}

(جـ)

نفرض أن $\overline{أب}$ ارتفاع البرج المطلوب $\overline{ب جـ}$

∵ ظا ٢٧° ١٥' = $\frac{أ\ ب}{ب\ جـ} = \frac{٥٠}{ب\ جـ}$

∴ ب جـ = $\frac{٥٠}{ظا\ ٢٧° ١٥'}$ ≃ ٩٧م

(٤) امتحان منطقة الشرقية ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

(أ) (١) محدد المصفوفة = $\begin{vmatrix} أ & ١٢ \\ ٣ & أ \end{vmatrix}$ = أ^{٢} − ٣٦

ضع المحدود = صفر

∴ أ^{٢} = ٣٦ ∴ أ = ±٦

∴ المصفوفة لها معكوس ضربي عند أ = ±٦

(٢) ∵ ٣ + ظتا^{٢} θ

= ٢ + (١ + ظتا^{٢} θ) = ٢ + قتا^{٢} θ

= ٢ + ٥ = ٧

(٣) ناتج فك المحدد

= (٨س + صفر) − (٥)

∴ ٨س − ٥ = ١١ ⇐ ٨س = ١٦

س = ٢

(٤) أجب بنفسك

(ب) المساحة للمثلث = $\frac{١}{٢} \begin{vmatrix} ٢ & ٤ & ١ \\ ٥ & ٢ & ١ \\ -٣ & -٢ & ١ \end{vmatrix}$

= $\frac{١}{٢}$ ((٤ − ١٠ − ١٢) − (−٦ − ٤ + ٢٠))

= $\frac{١}{٢}$ × −٢٨

∴ المساحة القيمة المطلقة = ١٤ وحدة مربعة

(جـ) θ^{ء} = $\frac{١٢٠}{١٨٠}$ × π = $(\frac{٢}{٣}π)^{ء}$

جا ١٢٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ مساحة القطعة الدائرية

= $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} (θ^{ء} − جا θ)

= $\frac{١}{٢}$ × ٦٤ $(\frac{٢}{٣}π - \frac{\sqrt{٣}}{٢})$ ≃ ٣٩ سم^{٢}

(٢) (أ) (١) ∵ جا^{٢} θ + جتا^{٢} θ = ١

∴ المقدار = ١ + ظتا^{٢} θ = قتا^{٢} θ

(٢) المتماثلة أ = أ^{ـ}

∴ $\begin{pmatrix} ٢س - ١ & ٤ \\ ٢ & ٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٧ \\ ٢س - ١ & ٢ \end{pmatrix}$

∴ ٢س − ١ = ٧ ∴ ٢س = ٨

∴ **س = ٤**

(٣) ٢جتا θ = −١ ∴ جتا θ = $-\frac{١}{٢}$

تقع في الربع الثالث أو الرابع ∴ θ في الربع الثالث ٢٤٠° ، ولا تقع في الربع الرابع.

(٤) ∵ ب^{ـ} على نظم ١ × ٣

∴ ء على نظم ٣ × ١

∴ أ × ب = ٢ × ١

(ب) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

∴ يقع في الربع الأول

ل١ : س + ص = ٤ ، (٠ ، ٠) ∌ مجموعة حل المتباينة

س	٠	٤
ص	٤	٠

ل٢ : ٢س + ص = ٦

(٠ ، ٠) ∌ مجموعة حل المتباينات

س	٠	٣
ص	٦	٠

الحل هو الجزء المظلل

والنقاط التي تعوض في دالة الهدف

هي أ = (٤ ، ٠) ، جـ = (٠ ، ٦)

لكن نقطة ب نقطة تلاقي المستقيمين

س + ص = ٤

٢س + ص = ٦ النقطة ب (١ ، ٣)

ر(٤ ، ٠) = ٣ × ٤ + ٠ = ١٢

ر(٠ ، ٦) = ٣ × ٠ + ٢ × ٦ = ١٢

ر(١ ، ٣) = ٣ × ١ + ٢ × ٣ = ٩

القيمة الصغرى لدالة الهدف عندما (١ ، ٣)

أب ارتفاع البرج

(٥) امتحان منطقة البحيرة ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

(أ) (١) ملحوظة $أ^{ت}$ على نظم ٣ × ١

ب على نظم ٣ × ١

العملية الآتية التي يمكن إجراؤها هي أ ب

(٢) $١ + طا^٢ θ = قا^٢ θ$

(٣) بالقسمة على حتا س

∴ طا س + ١ = ٠ ∴ طا س = −١

∴ ق(س) = ٣١٥°

∴ مجموعة الحل = {٣١٥°}

(٤) (٣ ، ١) لا تحقق ص >

(١ ، ٢) لا تحقق ص >

(١ ، ٣) لا تحقق ص >

∴ (٣ ، ٢) تحقق المتباينات كلها

(ب) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

∴ الحل يقع في الربع الأول

ل١ : ٢س + ٣ص = ١٨

س	٠	٩
ص	٦	٠

(٠ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة

٢س + ٣ص ≤ ١٨

ل٢ : −٤س + ص = −٨

س	٠	٢
ص	−٨	٠

∴ (٠ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة

−٤س + ص ≤ −٨

الجزء المظلل هو الحل

ونقاط ب = (٢ ، ٠) ، جـ = (٠ ، ٠)

د = (٠ ، ٦) أما "أ" فهي نقطة تقاطع المستقيمين

٢س + ٣ص = ١٨ ∴ أ = (٣ ، ٤)

−٤س + ص = −٨

ر(٢ ، ٠) = ٢ × ٢ + ٠ = ٤

ر(٠ ، ٦) = ٢ × ٠ + ٦ = ٦

ر(٠ ، ٠) = صفر

ر(٣ ، ٤) = ٢ × ٣ + ٤ = ١٠

عندها القيمة العظمى لدالة الهدف.

(٥) ∵ أس = جـ

٣س + ٤ص = ١

٥س − ٧ص = −١٢

$$∴ أ = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ -٧ & ٥ \end{pmatrix}$$

$$∴ محدد\ أ = Δ = \begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ -٧ & ٥ \end{vmatrix}$$

= −٢١ − ٢٠ = −٤١ ≠ ٠

∴ لها معكوس ضربي

$$∴ أ^{-١} = \frac{١}{-٤١} \begin{pmatrix} -٤ & -٧ \\ ٣ & -٥ \end{pmatrix}$$

$$∵ س = أ^{-١} جـ \text{ حيث } جـ = \begin{pmatrix} ١ \\ -١٢ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \frac{-١}{٤١} \begin{pmatrix} -٤ & -٧ \\ ٣ & -٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ \\ -١٢ \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-١}{٤١} \begin{pmatrix} ٤٨ + -٧ \\ ٣٦ - -٥ \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-١}{٤١} \begin{pmatrix} ٤١ \\ -٤١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ \\ ١ \end{pmatrix}$$

∴ س = −١ ، ص = ١

مجموعة الحل = {(−١ ، ١)}

(٢) (أ) (١) المحيط = ٢نق + ل = ١٢

∴ ٢نق + ٦ = ١٢

∴ ٢نق = ٦ ∴ نق = ٣

∴ مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل نق

= $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٣ = ٩ سم²

(٢) قيمة المحدد = حاصل ضرب القطر الرئيسي = −١ × ٣ × −٢ = ٦

(٣) ٢أ − ١ = ٣ ⟸ ٢أ = ٤

∴ أ = ٢

٣ب + ١ = ٧ ∴ ٣ب = ٦

∴ ب = ٢

(٤) حا ٤٧ = $\frac{ص}{٧}$

∴ ص = ٧ حا ٤٧

ص = ٥٫١ سم

حتا ٤٧ = $\frac{س}{٧}$ ∴ س = ٧ حتا ٤٧

∴ س = ٤٫٨ سم

$$(ب)\ مساحة\ المثلث = \frac{١}{٢} \begin{vmatrix} ١ & -٢ & -٢ \\ ١ & ١ & ٣ \\ ١ & ٣ & -٤ \end{vmatrix}$$

= $\frac{١}{٢}$ ((−٢ + ٩ + ٨) − (−٤ − ٦ − ٦))

= $\frac{١}{٢}$ (١٥ − (−١٦))

= $\frac{١}{٢}$ × ٣١ = ١٥٫٥ وحدة مربعة

(جـ) ∵ م أ = م ب

∴ المثلث م أ ب المتساوي الأضلاع

∴ م أ = م ب = نق = ٨ سم

مساحة القطعة الدائرية

= $\frac{١}{٢}$ نق² ($θ^{ر}$ − حا θ)

حيث $\theta^{د} = \frac{٦٠}{١٨٠} \times \pi = \left(\frac{\pi}{٣}\right)^{د}$

حا θ = حا ٦٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ مساحة القطعة الدائرية

= $\frac{١}{٢}$ نق^٢ ($\theta^{د}$ − حا θ)

= $\frac{١}{٢}$ × ٦٤ ($\frac{\pi}{٣}$ − حا ٦٠) ≃ ٥,٨ سم^٢

(٦) امتحان منطقة الأقصر ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

(١) (أ) ∵ $\begin{vmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{vmatrix}$ = ٣

∴ (س ل − ع ص) = ٣ .... (١)

لكن $\begin{vmatrix} ٢س & ٥ص \\ ٢ع & ٥ل \end{vmatrix}$ = ١٠ س ل − ١٠ ص ع

= ١٠(س ل − ص ع) من (١)

∴ الناتج = ١٠ × ٣ = **٣٠**

(٢) (١ ، ٢) ∉ الحل

لأنه لا يحقق س > ٢

(٢ ، ١) لا تحقق المتباينة س > ٢

(٣ ، ١) لا تحقق ص > ١

∴ (٣ ، ٢) تحقق المتباينات معاً

(٣) ∵ ١ + ظا^٢ أ = قا^٢ أ

∴ ١ + ظا^٢ أ = ١٥ ∴ ظا^٢ أ = ١٤

(٤) ∵ نق = $\frac{١٨}{٢}$ = ٩ ، ل = ١٦ سم

مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل نق

= $\frac{١}{٢}$ × ١٦ × ٩ = ٧٢ سم^٢

(ب) ∵ س = (أ ب + أ جـ)$^{-١}$

∴ س = (أ(ب + جـ))$^{-١}$

= (ب + جـ)$^{-١}$ أ$^{-١}$

∴ س = (ب$^{-١}$ + جـ$^{-١}$) أ$^{-١}$

∴ س = (ب$^{-١}$ + جـ$^{-١}$) أ$^{-١}$ .... (١)

∵ أ = $\begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ∴ أ$^{-١}$ = $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$

س = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ٠ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} -١ + ٠ & ٢ + ٦ \\ ٣ + ٠ & -٦ + ٠ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -١ & ٨ \\ ٣ & -٦ \end{pmatrix}$

(جـ) $\theta^{د}$ = $\frac{ل}{نق}$ = $\frac{١٠}{١٢}$ = $(١)^{د}$

∴ $\theta^{د}$ = ١ × $\frac{١٨٠}{\pi}$ = $\frac{١٨٠}{\pi}$ = ٥٧° ١٧َ ٤٥ً

حا θ = ٠,٨٤١٤٧

∴ مساحة القطعة الدائرية

= $\frac{١}{٢}$ نق^٢ ($\theta^{د}$ − حا θ)

= $\frac{١}{٢}$ × ١٤٤(١ − ٠,٨٤١٤٧)

= ١١,٤١٤ سم^٢

(٢) (أ) (١) $\begin{vmatrix} قا\theta & ظا^٢\theta \\ ١ & قا\theta \end{vmatrix}$ × $\begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٥ & -٧ \end{vmatrix}$

= (قا$^٢\theta$ − ظا$^٢\theta$)(−١٤ + ١٥)

= قا$^٢\theta$ − ظا$^٢\theta$ = ١

لأن: ١ + ظا$^٢\theta$ = قا$^٢\theta$

(٢) مساحة أى مضلع منتظم

= $\frac{١}{٤}$ ن س^٢ ظتا $\frac{\pi}{ن}$

والشكل ثمانى ∴ الزاوية $\frac{\pi}{٨}$ = $\frac{٤٥}{٢}$

∴ مساحة الثمانى المنتظم

= $\frac{١}{٤}$ × ٨ × (٧)^٢ × ظتا $\frac{٤٥}{٢}$

= ٢ × ٤٩ × $\frac{١}{ظا \frac{٤٥}{٢}}$ = ٢٣٦,٥٩ سم^٢

(٣) $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٠ \\ ١ \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} ٣س + ٢ص \\ س + ٤ص \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٠ \\ ١ \end{pmatrix}$

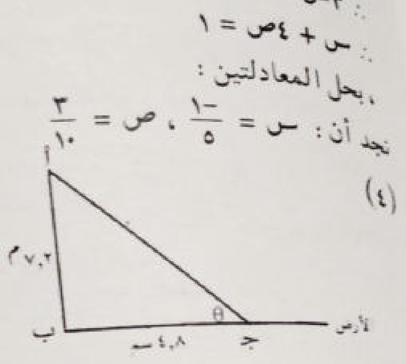
∴ ٣س + ٢ص = ٠ ،

∴ س + ٤ص = ١

بحل المعادلتين :

نجد أن: س = $\frac{-١}{٥}$ ، ص = $\frac{٣}{١٠}$

(٤)



بفرض أن ($\hat{\theta}$) زاوية ارتفاع الشمس

∴ ظا θ = $\frac{٧,٢}{٤,٨}$

∴ ق($\hat{\theta}$) = ٥٦° ١٨َ ٣٦ً

(ب) حا θ + حتا θ = $\frac{٣}{٢}$ بالتربيع للطرفين

حا$^٢\theta$ + حتا$^٢\theta$ + ٢ حا θ حتا θ = $\frac{٩}{٤}$

٢ حا θ حتا θ = $\frac{٩}{٤}$ − ١ = $\frac{٥}{٤}$

∴ حا θ حتا θ = **$\frac{٥}{٨}$**

(جـ) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

∴ الحل تقع فى الربع الأول

$ل_١$: س + ص = ٦

س	٠	٦
ص	٦	٠

(٠ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة :

س + ص = ٦

$ل_٢$: ٢س + ص = ١٠

س	٠	٥
ص	١٠	٠

(٠ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة

٢س + ص ≤ ١٠

الجزء المظلل هو حل المتباينات

حيث و = (٠ ، ٠) ، أ = (٥ ، ٠)

ب = (٠ ، ٦)

أما نقطة "جـ" فهى نقطة تقاطع المستقيمين

٢س + ص = ١٠ ، س + ص = ٦

بحلهما نجد وهى جـ = (٤ ، ٢)

∴ دالة الهدف ر = ٤س + ص

ر(٠ ، ٠) = صفر

ر(٥ ، ٠) = ٤ × ٥ + ٠ = ٢٠ عظمى

ر(٠ ، ٦) = ٠ + ٦ = ٦

ر(٤ ، ٢) = ٤ × ٤ + ٢ = ١٨

∴ القيمة العظمى عند أ = (٥ ، ٠)

(٧) امتحان منطقة القاهرة ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) م(٠ ، ٠) = ٠ ، م(٠ ، ١٠) = ١٠٠

م(٠ ، ٤٠) = ٤٠٠ ،

م(٢٠ ، ١٠) = ٣٥ × ٢٠ + ١٠ × ١٠ = ٨٠٠

∴ القيمة العظمى عند (٢٠ ، ١٠)

(ب) ∵ قيمة المحدد = أ² − ٣٦

ضع أ² − ٣٦ = ٠

∴ أ² = ٣٦ ∴ أ = ± ٦

∴ قيم أ التي تجعل للمصفوفة معكوساً ضربياً هي ح − {٦ ، −٦}

(جـ) ∵ قا(٩٠ − θ) = $\frac{1}{\text{حا}(٩٠ - θ)}$

∴ حا(٩٠ − θ) قا(٩٠ − θ) = ١

(ء) المحيط = ل + ٢نق = ٤ + ١٠

= ١٤ سم

(٢) (أ) ∵ س + ٨ = ٣٨ ∴ س = ٣٠

∵ −ص = ٤ص − ١٠ ∴ ص = ٢

∴ $\begin{pmatrix} ٣٠ & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$ = (٦٠ + ٦) = (٦٦)

(ب) الطرف الأيمن = $\frac{\text{حا}θ}{\text{جتا}θ} + \frac{\text{جتا}θ}{\text{حا}θ}$

= $\frac{\text{حا}^2θ + \text{جتا}^2θ}{\text{حا}θ\,\text{جتا}θ} = \frac{1}{\text{حا}θ\,\text{جتا}θ}$

= $\frac{1}{\text{جتا}θ} \times \frac{1}{\text{حا}θ}$ = قاθ قتاθ = الأيسر

(٣) (أ) Δ = $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix}$ = ١ − ٦ = −٥ ≠ ٠

Δس = $\begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix}$ = ٥ − ١٠ = −٥

Δص = $\begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix}$ = ٥ − ١٥ = −١٠

س = $\frac{Δس}{Δ} = \frac{-٥}{-٥}$ = ١

ص = $\frac{Δص}{Δ} = \frac{-١٠}{-٥}$ = ٢

مجموعة الحل = {(١ ، ٢)}

(ب) ∵ $\frac{س^\circ}{١٨٠} = \frac{θ^ء}{π}$

∴ θ^ء = $\frac{١٥٠ \times π}{١٨٠}$ = $\frac{٥}{٦}$π ≃ ٢,٦١٧٩^ء

∴ مساحة القطعة الدائرية

= ½ نق² (θ^ء − حا θ)

= ½ × ٢٥ (٢,٦١٧٩ − حا ١٥٠)

≃ ٢٦ سم²

(٤) (أ) ل١ : ٣س + ٥ص = ١٥

س	٠	٥
ص	٣	٠

(٠ ، ٠) لا تحقق المتباينة ،

ل٢ : ص = س − ١

س	٠	١
ص	−١	٠

(٠ ، ٠) لا تحقق المتباينة ، الجزء المظلل هو الحل للمتباينات .

(ب) جـ الشخص ، $\overline{\text{أب}}$ البرج

∵ طا ٢٥ = $\frac{\text{أب}}{\text{بجـ}}$

طا ٢٥ = $\frac{\text{أب}}{٥٠}$

∴ الارتفاع = أب = ٥٠ طا ٢٥ ≃ ٢٣م

(٨) امتحان منطقة القليوبية ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) مصفوفة أ تكون متماثلة إذا كان إذا كانت أ مربعة وكانت أ = أ^مد

ويكون لها معكوس ضربي إذا كان محدد أ ≠ صفر

(ب) مساحة المضلع = ¼ ء س² طتا $\frac{π}{ء}$

حيث ء عدد الأضلاع وطول الضلع س

∴ مساحة المضلع = ¼ × ٨ × ٣٦ طتا $\frac{١٨٠}{٨}$

≃ ١٧٣,٨ سم²

(جـ) المحيط = ٢نق + ل

∴ ١٢ = ٢نق + ٣ ∴ نق = $\frac{٩}{٢}$ سم

المساحة = ½ ل نق

= ½ × ٣ × $\frac{٩}{٢}$ = $\frac{٢٧}{٤}$ سم²

(ء) بالفك : ٦س − ٨ = ١٠

∴ ٦س = ١٨ ∴ س = ٣

(٢) (أ) ∴ أ = (أ^مد)^مد = $\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}$

الطرف الأيمن = $\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ ٢٢ + $\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}$ ٥−

∴ الطرف الأيمن =

$\begin{pmatrix} -٢٠ & -١٠ \\ -١٥ & ٢٠ \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} ١٢+٨+ & ٤-١٦ \\ ٩+١٦- & ١٢-٨- \end{pmatrix}$

+ $\begin{pmatrix} ٠ & ٢٢ \\ ٢٢ & ٠ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ = ☐

= الأيسر

(ب) مساحة القطعة الدائرية

= ½ نق² (θ^ء − حاθ)

∴ ٥٦ = ½ نق² ($\frac{π}{٢}$ − حا ٩٠°)

∴ نق² = ١٩٦,٢١٧ ∴ نق = ١٤ سم

(٣) (أ) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ يعني يقع الحل في الربع الأول

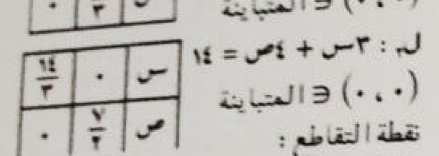
ل١ : س + ٣ص = ٧

س	٠	٧
ص	$\frac{٧}{٣}$	٠

(٠ ، ٠) ∈ المتباينة

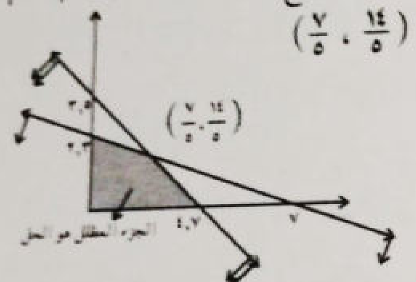
ل٢ : ٣س + ٤ص = ١٤

س	٠	$\frac{١٤}{٣}$
ص	$\frac{٧}{٢}$	٠



(٠ ، ٠) ∈ المتباينة

نقطة التقاطع : ($\frac{١٤}{٥}$ ، $\frac{٧}{٥}$)



ر(٤,٧ ، ٠) = ١٤١ ، ر(٠ ، ٢,٣) = ١١٥

ر($\frac{١٤}{٥}$ ، $\frac{٧}{٥}$) = ٣٠ × $\frac{١٤}{٥}$ + ٥٠ × $\frac{٧}{٥}$ = ١٥٤

∴ أكبر قيمة عندما س = $\frac{١٤}{٥}$ ، ص = $\frac{٧}{٥}$

(ب) الطرف الأيمن

= (١ + $\frac{\text{حا}^2θ}{\text{جتا}^2θ}$) × جتا⁴θ

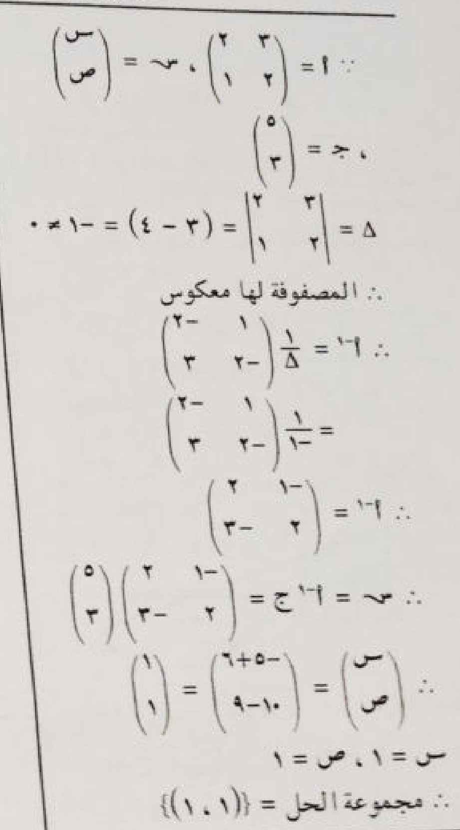
= $\frac{\text{جتا}^2θ + \text{حا}^2θ}{\text{جتا}^2θ}$ × جتا⁴θ

= جتا²θ = ١ − حا²θ = الأيسر

(٤) (أ) المساحة = ½ $\begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٣ \\ ١ & ٢ & -٤ \\ ١ & -٤ & ١ \end{vmatrix}$

= ½ × ٤٧ = ٢٣,٥ وحدة مربعة

(ب) ٢ص + ٣س = ٥ ، ٢س + ص = ٣



∵ أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ ، س = $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$

، جـ = $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٣ \end{pmatrix}$

$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = (٣ - ٤) = -١ \neq ٠$

∴ المصفوفة لها معكوس

∴ $أ^{-١} = \frac{١}{\Delta} \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ -٢ & ٣ \end{pmatrix}$

$= \frac{١}{-١} \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ -٢ & ٣ \end{pmatrix}$

∴ $أ^{-١} = \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix}$

∴ س = $أ^{-١}$ جـ = $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٥ \\ ٣ \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٥+٦ \\ ١٠-٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ١ \end{pmatrix}$

س = ١ ، ص = ١

∴ مجموعة الحل = {(١ ، ١)}

(٩) امتحان منطقة المنوفية ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) ∵ $حا^٢θ + حتا^٢θ + ٢ حاθ حتاθ$

$- ٢ حاθ حتاθ$ = واحد

(ب) ∵ $(أب)^{مد} = ب^{مد} أ^{مد}$

∴ $ب^{مد} أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix}$

(جـ) م = $\frac{١}{٢} \begin{vmatrix} ٣ & ٣ & ١ \\ -٤ & ٢ & ١ \\ ١ & -٤ & ١ \end{vmatrix} = ٢٣٫٥$

وحدة مربعة .

(ء) فإن المصفوفة س = I = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

(٢) (أ) س + ص + ٣ع = ٥

ص - ع = ٠ ، ٢س - ٤ع = -٢

$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٣ \\ ٠ & ١ & -١ \\ ٢ & ٠ & -٤ \end{vmatrix}$

= (-٤ -٢) - (٦) = -١٢

$\Delta_س = \begin{vmatrix} ٥ & ١ & ٣ \\ ٠ & ١ & -١ \\ -٢ & ٠ & -٤ \end{vmatrix}$

= (-٢٠ +٢) - (-٦) = -١٢

$\Delta_ص = \begin{vmatrix} ١ & ٥ & ٣ \\ ٠ & ٠ & -١ \\ ٢ & -٢ & -٤ \end{vmatrix}$

= (-١٠) - (٢) = -١٢

$\Delta_ع = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٥ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٢ & ٠ & -٢ \end{vmatrix}$

= (-٢) - (١٠) = -١٢

∴ س = $\frac{\Delta_س}{\Delta} = \frac{-١٢}{-١٢} = ١$

ص = ١ ، ع = ١

∴ مجموعة الحل = {(١ ، ١ ، ١)}

(ب) $\overline{أب}$ ارتفاع الطائرة

حا ٦٣ = $\frac{أ ب}{أ جـ} = \frac{أ ب}{٤٢}$

أ

٤٢م

٦٣°

جـ ب

∴ أب = ٤٢ حا ٦٣° = ٣٧٫٤ م

(٣) (أ) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ الربع الأول

ل١ : س + ص = ٦

(٠ ، ٠) ∈ المتباينة

س	٠	٦
ص	٦	٠

ل٢ : ٢س + ص = ١٠

(٠ ، ٠) ∈ المتباينة

س	٠	٥
ص	١٠	٠

الجزء أ ب و جـ المظلل هو الحل للمتباينات

نقطة تقاطع المستقيمين هى (٤ ، ٢)

ر(٠ ، ٠) = ٠

ر(٥ ، ٠) = ٢٠ ،

ر(٤ ، ٢) = ١٦ + ٢ = ١٨

القيمة الصغرى عند (٠ ، ٠)

(ب) ∵ حتا$(\frac{\pi}{٢} - θ) = \frac{١}{٢}$

∴ حاθ = $\frac{١}{٢}$

مجموعة الحل فى]٠ ، ٣٦٠°[هى ٣٠ ، ١٥٠

يعنى {$\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٥\pi}{٦}$}

الحل العام :

{$\frac{\pi}{٦} + ٢\pi$ ن ، $\frac{٥\pi}{٦} + ٢\pi$ ن}

حيث ن ∈ ص

(٤) (أ) شبه متماثلة يعنى أ = $-أ^{مد}$

∴ $\begin{pmatrix} ٠ & -٢س & -٥ \\ ع+٦ & ٠ & ٣ع \\ ٣ص+س & ٦ & ٠ \end{pmatrix}$

$= - \begin{pmatrix} ٠ & ع+٦ & ٣ص+س \\ -٢س & ٠ & ٦ \\ -٥ & ٣ع & ٠ \end{pmatrix}$

∴ -٢س = -ع - ٦ .... (١)

∵ ٣ع = -٦ ∴ ع = -٢

ومن (١)

∴ -٢س = ع + ٦

∴ ٢س = -٢+٦

∴ س = ٢

∵ ٣ص+س=٥

∴ ٣ص+٢=٥

∴ ٣ص = ٣

∴ ص = ١

(ب) سبق حلها فى القليوبية رقم (٢)ب ٢٠١٨

(١٠) امتحان منطقة الشرقية ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) س = ٥ ، ص = ٣ ∴ س + ص = ٨

(ب) ∵ $أ^٢ = ٢٥$ ∴ أ = ±٥

(جـ) حاθ = $\frac{١}{٢}$ ∴ ق($\hat{θ}$) = ٣٠° أ، ١٥٠°

(ء) ∵ $طا^٢θ + ١ = قا^٢θ$

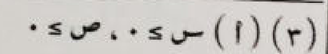
∴ $طا^٢θ + ١ = ٥$ ∴ $طا^٢θ = ٤$

(٢) (أ) م = $\frac{١}{٢} \begin{pmatrix} -٤ & ٢ & ١ \\ ٣ & ١ & ١ \\ -٢ & ٥ & ١ \end{pmatrix}$

$\frac{١}{٢}$ [(-٤ + ١٥ -٤)-(-٢-٢٠ + ٦)]

= $\frac{٢٣}{٢}$ وحدة مربعة

(ب) الطرف الأيمن = حاθ × حتاθ × $\frac{حاθ}{حتاθ}$



= $حا^٢θ = ١ - حتا^٢θ$ = الأيسر

(٣) (أ) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

يعنى الحل فى الربع الأول

ل١ : ٢س + ٣ص = ١٨

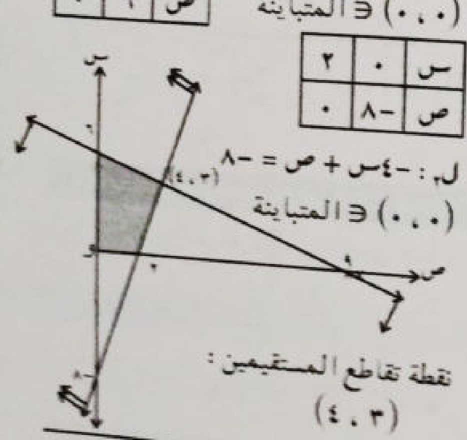
(٠ ، ٠) ∈ المتباينة

س	٠	٩
ص	٦	٠

س	٠	٢
ص	-٨	٠

ل٢ : -٤س + ص = -٨

(٠ ، ٠) ∈ المتباينة



نقطة تقاطع المستقيمين :

(٣ ، ٤)

∵ ر(٠ ، ٠) = ٠ ، ر(٢ ، ٠) = ٤

ر(٠ ، ٦) = ٦ ، ر(٣ ، ٤) = ٦ + ٤ = ١٠

∴ القيمة العظمى لدالة الهدف عندما

س = ١٣ ، ص = ٤ وتساوى ١٠

(ب) المحيط = ٢ع + ل

٢٥ = ٢ع + ٧ ∴ ٢ع = ١٨ ∴ ع = ٩

المساحة = $\frac{١}{٢}$ ل ع

= $\frac{١}{٢}$ × ٧ × ٩ = $\frac{٦٣}{٢}$ سم²

(٤) (أ) ∵ ص² = $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ١ & -٢+٦ \\ ٠ & ٩ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ٠ & ٩ \end{pmatrix}$

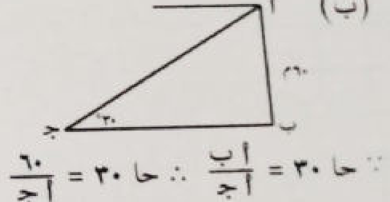
٢ص = $\begin{pmatrix} -٢ & ٤ \\ ٠ & ٦ \end{pmatrix}$ ، ٣I = $\begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$

∴ الطرف الأيمن

= $\begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ٠ & ٩ \end{pmatrix}$ − $\begin{pmatrix} -٢ & ٤ \\ ٠ & ٦ \end{pmatrix}$ − $\begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ = □ = الأيسر

(ب)



∵ حا ٣٠ = $\frac{أب}{أجـ}$ ∴ حا ٣٠ = $\frac{٦٠}{أجـ}$

∴ أجـ = ١٢٠م

(١١) امتحان منطقة الغربية ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) فإن س × ص على النظم ٣ × ١

(ب) $س^{مد}$ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٧ \\ ٤ & ٠ \end{pmatrix}$

(جـ) ٦أ − ٨ = ١٠ ∴ أ = ٣

(ء) ∵ ١ + طا²θ = قا²θ

∴ ١ + ٩ = قا²θ ∴ قا²θ = ١٠

(٢) (أ) سبق برهنة ذلك الشرقية (٢) (ب) ٢٠١٨

(ب) تم حل ذلك فى الشرقية (٣)(ب) ٢٠١٨

(٣) (أ)

بفرض أن:

$\overline{أب}$ البرج

المطلوب طول $\overline{بجـ}$

∵ طا ٣٦َ ٢٨° = $\frac{٦٠}{بجـ}$

∴ ب جـ = $\frac{٦٠}{طا ٣٦َ ٢٨°}$ ≃ ١١٠م

(ب) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

∴ الحل يقع فى الربع الأول

ل١ : ٣ص + س = ١٥

س	٠	١٥
ص	٥	٠

(٠ ، ٠) لا تقع فى المتباينة

ل٢ : ٤س + ٣ص = ٢٤

س	٠	٦
ص	٨	٠

(٠ ، ٠) لا تقع فى المتباينة

الجزء المظلل هو الحل

نقطة تقاطع المستقيم (٣ ، ٤)

ر(١٥ ، ٠) = ٣ × ٠ + ٢ × ١٥ = ٣٠

ر(٠ ، ٨) = ٣ × ٨ + ٢ × ٠ = ٢٤

ر(٣ ، ٤) = ٣ × ٤ + ٢ × ٣ = ١٨

∴ أقل ما يمكن عند (٣ ، ٤) وهو ١٨

(١٢) امتحان منطقة البحيرة ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) حا θ حتا θ × $\frac{حاθ}{حتاθ}$ = حا²θ

∴ المقدار يساوى حا²θ

(ب) المصفوفة أ ب على النظم ٢ × ١

(جـ) طا θ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ∴ ق($\hat{θ}$) = ٣٠°

(ء) التى تحقق المتباينات هى النقطة (١ ، ١)

(٢) (أ) سبق حلها فى القليوبية

رقم (٢) (أ) ٢٠١٨

(ب) سبق حلها فى الشرقية

رقم (٣) (أ) ٢٠١٨

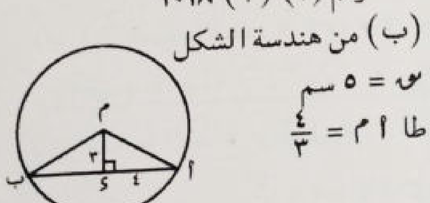
(٣) (أ) سبق حلها فى الشرقية

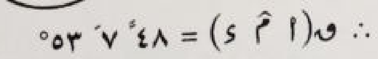
رقم (٢) (أ) ٢٠١٨

(ب) من هندسة الشكل

نق = ٥ سم

طا أ م = $\frac{٤}{٣}$





∴ ق(أ م̂ ء) = ٤٨ً ٧َ ٥٣°

∴ قياس الزاوية المركزية (أ م̂ ب)

= ٣٧ً ١٥َ ١٠٦°

∴ حا ١٥َ ١٠٦° = $\frac{٢٤}{٢٥}$ ،

، $θ^{ء}$ = $\frac{١٠٦}{١٨٠}$π ≃ ١,٨٥٤٦

∴ مساحة القطعة الدائرية

= $\frac{١}{٢}$ نق² ($θ^{ء}$ − حاθ)

= $\frac{١}{٢}$ × ٢٥ × ٠,٨٩٤٥ ≃ ١١ سم²

(٤) (أ) س + ٣ص = ٥

٢س + ٥ص = ٨

∵ أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}$ ، س = $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ ،

جـ = $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٨ \end{pmatrix}$

∵ Δ = $\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix}$ = ٥ − ٦ = −١ ≠ ٠

∴ المصفوفة لها معكوس

∴ أ⁻¹ = $\frac{١}{-١}$ $\begin{pmatrix} ٥ & -٣ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -٥ & ٣ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$

∵ س = أ⁻¹ جـ

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -٥ & ٣ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٥ \\ ٨ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} -٢٥+٢٤ \\ ١٠-٨ \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -١ \\ ٢ \end{pmatrix}$

∴ س = −١ ، ص = ٢

∴ مجموعة الحل = {(−١ ، ٢)}

(ب) $\overline{أب}$ ارتفاع الفنار

المطلوب $\overline{أجـ}$

حا ٣٥ = $\frac{أب}{أجـ}$ = $\frac{٥٠}{أجـ}$

∴ أجـ = $\frac{٥٠}{حا٣٥}$ ≃ ٨٧م

(١٣) امتحان منطقة أسيوط ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) أ + $أ^{مد}$ = □

فإن أ شبه متماثلة لأن $أ^{مد}$ = −أ

(ب) $\frac{حاθ}{حتاθ} \times \frac{١}{حاθ} = \frac{١}{حتاθ} =$ قاθ

(جـ) النقطة هى (٣ ، ٢)

(ء) المساحة = $\frac{١}{٢}$ ل نق

= $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٤ = ١٢ سم²

(٢) (أ) أ × ب = (-٤ - ١ + ١٢) = ٧

(ب)

$\overline{أب}$ ارتفاع البرج

ظا ٢٦ ٣٨° = $\frac{أب}{ب جـ} = \frac{أب}{٥٠}$

∴ أب = ٥٠ ظا ٢٦ ٣٨° ≃ ٤٠ م

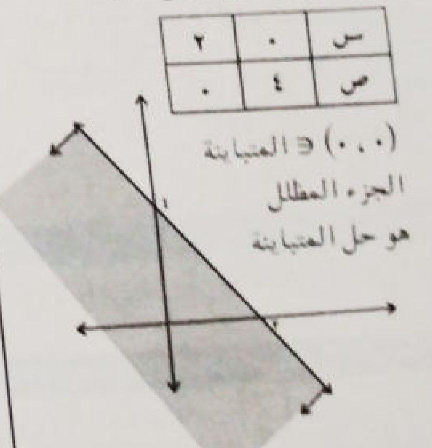
(٣) (أ) مساحة Δ = $\frac{١}{٢}\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ١ & -٤ & ٣ \\ ١ & ٣ & -٢ \end{vmatrix}$

= $\frac{١}{٢}$ |(-٤ + ٩ - ٤) - (٨ + ٣ + ٦)|

= ٨ وحدة مربعة

(ب) ل : ٢س + ص = ٤

س	٠	٢
ص	٤	٠



(٠ ، ٠) ∈ المتباينة

الجزء المظلل هو حل المتباينة

(٤) (أ) مساحة Δ = $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ٦ = ٢٤ سم²

(ب) سبق حلها فى الشرقية (٤)(أ)

(١٤) امتحان منطقة القاهرة ١٤٣٨هـ/٢٠١٧م

(١) (أ) س - ٣ص = -٤ .... (١)

٢س + ص = ٢ .... (٢)

بضرب المعادلة (١) × -٢

∴ -٢س + ٦ص = ٨

٢س + ص = ٢

٧ص = ١٠ ∴ ص = $\frac{١٠}{٧}$

، عوض فى (١) :

∴ س = -٤ + $\frac{٣٠}{٧} = \frac{٢}{٧}$

∴ مجموعة الحل = {($\frac{٢}{٧}$ ، $\frac{١٠}{٧}$)}

(ب) ∵ محيط القطاع = ٢نق + ل = ١٠

∴ ٢نق + ٢ = ١٠ ∴ نق = ٤ سم

∵ المساحة للقطاع = $\frac{١}{٢}$ ل نق

= $\frac{١}{٢}$ × ٢ × ٤ = ٤ سم²

(جـ) ∵ حا²θ + ٢حاθ حتاθ

+ حتا²θ - ٢حاθ حتاθ = واحد

(ء) عدد العناصر = ٩

(٢) (أ) الطرف الأيمن = $\frac{حتا س \times ظا س}{قتا س}$

= حتا س × $\frac{حا س}{حتا س}$ × حا س

= حا²س = ١ - حتا²س = الأيسر

(ب) الطرف الأيمن

= $\begin{pmatrix} ٠ & -٣ \\ -٣ & ٠ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -٤ & ٢ \\ -٦ & ٠ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ٩ & ٠ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ = □ = الطرف الأيسر

(٣) (أ) ∵ س⁻¹ = $\frac{١}{-١}\begin{pmatrix} -أ & -١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} أ & ١ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$ = س

ملحوظة : Δ = $\begin{vmatrix} أ & ١ \\ -١ & ٠ \end{vmatrix}$ = -١ ≠ ٠

(ب) θ^ء = $\frac{ل}{نق} = \frac{٢٠}{١٢} = \frac{٥}{٣}$

∴ θ° = $\frac{٥}{٣} \times \frac{١٨٠°}{π}$ ≃ ٩٥° ٣٠'

مساحة القطعة الدائرية

= $\frac{١}{٢}$ نق² (θ^ء - حا θ°)

= $\frac{١}{٢}$ × ١٤٤ ($\frac{٥}{٣}$ - حا ٩٥° ٣٠')

≃ ٤٨ سم²

(٤) (أ) بفرض أن :

جـ القارب

المطلوب :

طول $\overline{أجـ}$

∵ حا ٣٥° = $\frac{٥٠}{أجـ}$

∴ أجـ = $\frac{٥٠}{حا ٣٥°}$ ≃ ٨٧ م

(ب) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ يعنى أنه يقع فى الربع الأول :

ل١ : س + ص = ٨ ،

س	٠	٨
ص	٨	٠

ل٢ : ص = ٣

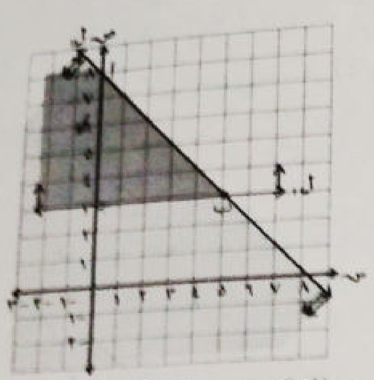
مستقيم يوازى محور السينات .

ملحوظة : ٠ + ٠ ≥ ٨

∴ (٠ ، ٠) ∈ الحل للمستقيم ل١

٠ ≱ ٣

∴ (٠ ، ٠) ∉ الحل للمستقيم ل٢



من الشكل الجزء المظلل الحل للمتباينات هو Δ أ ب جـ ، حيث أ = (٠ ، ٨)

، ب = (٥ ، ٣) ، جـ = (٠ ، ٣)

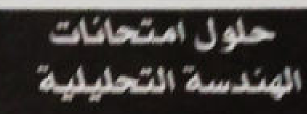
∵ ر = ٣س + ٢ص

∴ ر أ = ٣ × ٠ + ٢ × ٨ = ١٦

، ر ب = ٣ × ٥ + ٢ × ٣ = ٢١ عظمى

، ر جـ = ٣ × ٠ + ٢ × ٣ = ٦

قيمة الدالة أكبر ما يمكن عند ب = (٥ ، ٣)



حلول امتحانات الهندسة التحليلية

(١) امتحان محافظة القاهرة ١٤٤٠هـ / ٢٠١٩م

(١) (١) ‖أ‖ = √(٤ + ٤ × ٣) = √١٦ = ٤

ظا هـ = ص / س ⇐ ظا هـ = ٢√٣ / ٢ = √٣

∴ ق(هـ) = ظا⁻¹ (√٣) = ٦٠° = ط / ٣

∴ الصورة أ على الصورة القطبية هو (٤ ، ط/٣)

(٢) طول العمود = |٤ × ٣ − ١٣ + جـ| / √(١٦ + ٩)

∴ ٣ = |٥ + جـ| / ٥

∴ |٥ + جـ| = ١٥ ∴ ٥ + جـ = ±١٥

∴ جـ = −٢٠ ، جـ = ١٠

∴ قيمة جـ هي {−٢٠ ، ١٠}

(٣)



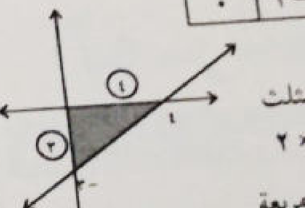
س = (٣ × ٥ + ١ × −٤) / (٣ + ١) = ١١ / ٤

ص = (٣ × −٣ + ١ × ٤) / (٣ + ١) = −٥ / ٤

∴ جـ = (١١/٤ ، −٥/٤)

(٤) ٣س − ٤ص = ١٢

س	٠	٤
ص	−٣	٠



مساحة المثلث

= ١/٢ × ٤ × ٢

= ٦ وحدة مربعة

(٥) الرسم ليس حلاً

لكن هنا يؤكد الحل

∵ أ ب جـ د

متوازي أضلاع ∴ أب // د جـ

∴ ب − أ = جـ − د

∴ د = جـ + أ − ب

∴ د = (٤ ، ٤) + (٢ ، −١) − (٧ ، ١)

= (−١ ، ٢)

(ب) بحل المعادلتين :

س − ٤ص = −١٤ ، ٤س + ص = −٥

∴ س = −٢ ، ص = ٣

∴ النقطة (−٢ ، ٣) نقطة تقاطعهما

∵ م١ = − معامل س / معامل ص = −١ / −٤ = ١/٤

وميل المعادلة للمستقيم الثاني

م٢ = −٤ / ١ = −٤

∵ م١ × م٢ = −١ ∴ المستقيم متعامدان

معادلة المستقيم المارة بالنقطتين

(−٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢)

الميل = (٣ − ٢) / (−٢ − ٣) = ١ / −٥

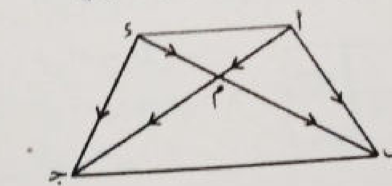
معادلة المستقيم المطلوب

(ص − ٢) / (س − ٣) = ١ / −٥

−٥ص + ١٠ = س − ٣

∴ **س + ٥ص − ١٣ = ٠**

(جـ) بفرض أن أجـ ∩ ب د = {م}



في △ أ ب م :

∴ أم + م ب = أ ب .... (١)

في △ د م جـ :

∴ د م + م جـ = د جـ .... (٢)

من (١) ، (٢) بالجمع

أب + د جـ

= (أم + م جـ) + (د م + م ب)

= أ جـ + د ب

(٢) (أ)

(١) ق١ = ٦ جتا (٢ط/٣) س + ٦ جا (٢ط/٣) ص

∴ ق١ = −٣ س + ٣√٣ ص

ق٢ = ٦ جتا (٤ط/٣) س + ٦ جا (٤ط/٣) ص

= −٣ س − ٣√٣ ص

∵ مقدار محصلة هذه القوى

= ق١ + ق٢ + ق٣

= −٣ س + ٣√٣ ص − ٣√٣ ص − ٣ س

− ٣√٣ ص + ٩ س + ٤ ص

∴ ح = ٣ س + ٤ ص

∴ ‖ح‖ = ٣ س + ٤ ص

∴ ‖ح‖ = √(٩ + ١٦) = ٥ وحدة قوة

(٢)

في △ م ب جـ :

م ع متوسط في المثلث م ب جـ

∴ ٢ م ع = م ب + م جـ .... (١)

∵ م ص = ١/٢ ب م ∵ م س = ١/٢ جـ م

المطلوب : م س + م ص + م ع

= ١/٢ جـ م + ١/٢ ب م + م ع

= −١/٢ (م جـ + م ب) + م ع من (١)

= −١/٢ (٢ م ع) + م ع

= −م ع + م ع = صفر

(٣)

نقطة التقسيم هي : (٠ ، ص)

∴ صفر = (ل١ × ٢ + ل٢ × ٥) / (ل١ + ل٢)

∴ ٢ل١ + ل٢ × ٥ = ٠ ⇐ ٢ل١ = −٥ل٢

∴ ل١ / ل٢ = −٥ / ٢ < ٠

∴ التقسيم من الخارج بنسبة ٥ : ٢ كما بالرسم

(٤) م١ = ٢ − √٣ ، م٢ = ٢ + √٣

∵ م١ م٢ = ٤ − ٣ = ١

م١ − م٢ = ٢ − √٣ − ٢ − √٣ = −٢√٣

∵ ظا هـ = |(م١ − م٢) / (١ + م١ م٢)| حيث (هـ) الحادة

∴ ظا هـ = |−٢√٣ / (١ + ١)| = |√٣|

∴ ق(هـ) = ٦٠°

∴ قياس الزاوية المنفرجة = ١٨٠° − ٦٠°

= ١٢٠°

(٥) م١ = −أ / −٣ = أ / ٣

المعادلة الثانية : ٢س − ٣ص = ١٨

(بالضرب × ٦) ، ∴ م٢ = −٢ / −٣ = ٢ / ٣

∵ ل١ // ل٢ ∴ م١ = م٢

∴ أ / ٣ = ٢ / ٣ ∴ **أ = ٢**

(ب) ميل المستقيم = −٣/٢ ويمر بالنقطة (٣، −٥)

∴ المعادلة (ص + ٥)/(س − ٣) = −٣/٢

∴ ٢ص + ١٠ = −٣س + ٩

⇐ ٢ص + ٣س + ١ = ٠

(جـ) طول العمود المرسوم من مركز الدائرة نقطة الأصل إلى المستقيم الأول = ٢

طول العمود المرسوم من مركز الدائرة نقطة الأصل إلى المستقيم الثاني = ٢

∵ الإبعاد متساوية .

∴ الأوتار متساوية في الطول .

(٢) امتحان منطقة القليوبية ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

(أ) أولاً : (١) الميل = ظا ٤٥ = ١

∴ متجه اتجاه المستقيم = (١، ١)

∴ المعادلة المتجهة للمستقيم

ر = (٣، −١) + ك (١، ١)

ثانياً : طول العمود

= |٥ × ١ − ١٢ × ٢ − ٧| / √(٢٥ + ١٤٤) = ٢٦/١٣

= ٢ وحدة طول

(٢) أولاً : أ (س، ص) ، جـ (٢، ٦) ، ب (٣، ٧)

٢ = (س + ٣)/٢ ⇐ ٤ = س + ٣

∴ س = ١

∴ (ص + ٧)/٢ = ٦ ⇐ ص + ٧ = ١٢

∴ ص = ٥ ، ∴ أ = (١، ٥)

ثانياً : ∵ م١ × م٢ = −١

∴ ك/٣ × ٢/−٤ = −١ ، ك = ١٢/٢ = ٦

(٣) م١ = −٢/−٣ = ٢/٣ ، م٢ = ٤/٣

∴ م٢ − م١ = ٢/٣

∴ م١ م٢ = ٢/٣ × ٤/٣ = ٨/٩

∵ ظا هـ = |(م٢ − م١)/(١ + م١ م٢)| = |(٢/٣)/(١ + ٨/٩)|

= (٢/٣)/(١٧/٩) = ٦/١٧

∴ ق(هـ) = ظا⁻¹(٦/١٧) = ١٩° ٢٦

(٤) م١ = −٢/١ = −٢ ، م٢ = −٢/١ = −٢

∵ م١ = م٢ ∴ المستقيمان متوازيان

(٥)

س = (٤ × ١ − ٣ × ٢)/(٤ − ٣) = −٢/١ = −٢

ص = (٤ × −١ − ٣ × −٣)/(٤ − ٣) = (−٤ + ٩)/١ = ٥

∴ نقطة التقسيم = (−٢، ٥)

(٢) (أ) (١) أولاً : أب = ب − أ

= (٣، ك) − (٧، ٢) = (−٤، ك − ٢)

∵ ||أب|| = ٥ = √(١٦ + (ك − ٢)²)

∴ ٢٥ = ١٦ + ك² − ٤ك + ٤

∴ ك² − ٤ك − ٥ = ٠

(ك − ٥)(ك + ١) = ٠

∴ ك = ٥ ، ك = −١

ثانياً : المعادلة س = ١

(٢) أولاً : معيار ||و أ||

= √(٦٤ × ٣ + ٦٤) = ١٦

ظا θ = ٨/(٨√٣) = ١/√٣

∴ ق(θ) = ٣٠° = π/٦

∴ الصورة القطبية = (١٦، π/٦)

ثانياً : بالقسمة على ١٢

∴ س/٤ + ص/٣ = ١ الجزآن هما ٤، ٣

(٣) بحل المعادلتين :

س + ص = ٥ ، ٢س + ص = ٨

∴ س = ٣ ، ص = ٢

نقطة التقاطع = (٣، ٢)

∴ معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٣، ٢) ، (٢، ١)

الميل = (٢ − ١)/(٣ − ٢) = ١

∴ معادلة المستقيم : (ص − ١)/(س − ٢) = ١

ص − ١ = س − ٢

∴ ص − س + ١ = ٠

(٤) مساحة المضلع المنتظم

= ١/٤ ن س² ظتا π/ن

∴ مساحة الشكل الخماسي المنتظم

= ١/٤ × ٥ × (١٦)² ظتا π/٥

= ١/٤ × ٥ × (١٦)² × ١/ظا ٣٦

= ٤٤٠،٤٤ سم²

(٥) في Δ أ ب د :

أب + ب د = أ د بالضرب × ٢

٢ أب + ٢ ب د = ٢ أ د ..... (١)

في Δ أ د جـ

أجـ + جـ د = أ د

بالضرب × ٣

٣ أجـ + ٣ جـ د = ٣ أ د ...... (٢)

بجمع (١) ، (٢) ٥ أ د = ٣ أجـ + ٣ جـ د + ٢ أب + ٢ ب د

∵ ٢ ب د = ٣ د جـ = −٣ جـ د

∴ ٥ أ د = ٣ أجـ + ٢ أب

∴ ٥ أ د = ٣ أجـ + ٢ أب + ٣ جـ د − ٣ جـ د

(٣) امتحان منطقة المنوفية ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

(أ) (١) م ⊥ هـ ∴ م١ م٢ = −١

∴ ٢/٣ × ك/٢ = −١ ∴ ك = −٣

(٢) ||أ|| = √(٤ + ٤ × ٣) = ٤

ظا θ = −٢√٣/٢ = −√٣

∴ θ = ظا⁻¹(−√٣) = ٣٠٠° = ٥/٣ π

∴ الصورة القطبية = (٤، ٥/٣ π)

(٣) م١ = −٣/−١ = ٣ ، م٢ = −٢/١ = −٢

∵ ظا هـ = |(م٢ − م١)/(١ + م١ م٢)|

= |(٢ + ٣)/(١ − ٦)| = |٥/−٥| = ١

∴ ق(هـ) = ٤٥°

(٤) أب + ب جـ = أجـ

بإضافة أجـ للطرفين

∴ أب + ب جـ + أجـ

= ٢ أجـ

∴ الناتج ٢ أجـ

(ب) ∵ ٢ ل + ٥(ص − س)

= ٢(ص − ع) − ٣(س − ص)

∴ ٢ ل + ٥ص − ٥س

= ٢ص − ٢ع − ٣س + ٣ص

∴ ٢ ل = ٥س − ٣س − ٢ع

٢ ل = ٢س − ٢ع

∴ $\overleftarrow{ل} = \overleftarrow{س} - \overleftarrow{ع}$

$\overleftarrow{ل} = \overleftarrow{ع}\overleftarrow{س}$ وهو المطلوب .

(جـ) نقطة " م " تقع فى منتصف $\overline{أب}$

ويفرض أن أ = (س ، ص)

(-٢ ، ١) ، م ، ب ، (-٦ ، ٣) ، أ ، (س ، ص)

ويفرض أن :

أ = (س ، ص) حيث م منتصف $\overline{أب}$

∴ $\frac{س - ٦}{٢} = -٢$

∴ س − ٦ = −٤ ∴ **س = ٢**

$\frac{ص + ٣}{٢} = ١$ ∴ ص + ٣ = ٢

∴ **ص = −١**

∴ نقطة أ = (٢ ، −١)

المماس عمودى على القطر $\overline{أب}$

∵ ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب} = \frac{٣ + ١}{-٦ - ٢}$

$= \frac{٤}{-٨} = \frac{-١}{٢}$

$\overline{أب}$ ، المماس عند أ متعامدان

∴ م١ م٢ = −١

∴ ميل المماس عند أ = ٢

ويمر بالنقطة (٢ ، −١) : $\frac{ص + ١}{س - ٢} = ٢$

∴ ص + ١ = ٢س − ٤

ص − ٢س + ٥ = ٠

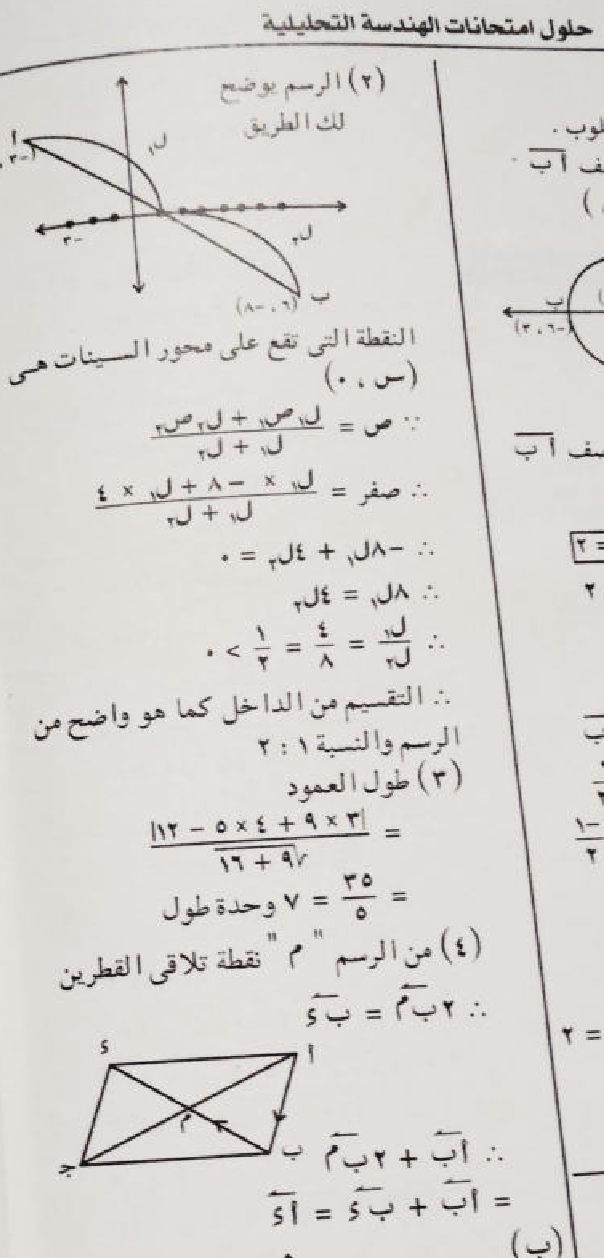
(٢) (أ) (١) ∵ ‖ ٣ ك $\overleftarrow{أ}$ ‖ = ‖ −١٥ $\overleftarrow{أ}$ ‖

∴ |٣ ك| ‖ $\overleftarrow{أ}$ ‖ = ١٥ ‖ $\overleftarrow{أ}$ ‖

∴ |٣ ك| = ١٥

٣ك = ١٥ أو ٣ك = −١٥

∴ ك = ٥ | ∴ ك = −٥



(٢) الرسم يوضح لك الطريق

النقطة التى تقع على محور السينات هى (س ، ٠)

∵ $ص = \frac{ل_١ ص_١ + ل_٢ ص_٢}{ل_١ + ل_٢}$

∴ $صفر = \frac{ل_١ \times -٨ + ل_٢ \times ٤}{ل_١ + ل_٢}$

∴ −٨ل١ + ٤ل٢ = ٠

∴ ٨ل١ = ٤ل٢

∴ $\frac{ل_١}{ل_٢} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢} > ٠$

∴ التقسيم من الداخل كما هو واضح من الرسم والنسبة ١ : ٢

(٣) طول العمود

$= \frac{|٣ \times ٩ + ٤ \times ٥ - ١٢|}{\sqrt{٩ + ١٦}}$

$= \frac{٣٥}{٥} = ٧$ وحدة طول

(٤) من الرسم " م " نقطة تلاقى القطرين

∴ ٢ $\overleftarrow{ب م} = \overleftarrow{ب ء}$

∴ $\overleftarrow{أب} + ٢\overleftarrow{ب م}$

$= \overleftarrow{أب} + \overleftarrow{ب ء} = \overleftarrow{أ ء}$

(ب)

∵ $\frac{ب جـ}{أ ب} = \frac{٢}{١} \Leftarrow \frac{ب جـ}{أ ب} = \frac{٢}{١}$

أيضاً : بفرض أن جـ = (س ، ص)

∴ $س = \frac{ل_١ س_١ - ل_٢ س_٢}{ل_١ - ل_٢}$

$= \frac{٢ \times ٣ - ١ \times -٥}{٢ - ١} = \frac{٦ + ٥}{٢ - ١} = ١١$

$ص = \frac{ل_١ ص_١ - ل_٢ ص_٢}{ل_١ - ل_٢} = \frac{٨ - ٢}{١} = ٦$

$= \frac{٢ \times ٤ - ١ \times ٢}{٢ - ١}$

∴ نقطة جـ = (١١ ، ٦)

(جـ) معادلة المستقيم :

(٢س + ص − ٥)

+ ك(٣س − ٢ص − ٤)

∵ يمر بالنقطة (٥ ، ٢)

∴ تحقق المستقيم .

∴ (٢ × ٥ + ٢ − ٥)

+ ك(٣ × ٥ − ٢ × ٢ − ٤) = ٠

∴ ٧ + ٧ك = ٠ ∴ ك = −١

∴ المعادلة هى :

(٢س + ص − ٥) − (٣س − ٢ص − ٤) = ٠

∴ −س + ٣ص − ١ = ٠

∴ **٣ص − س − ١ = ٠**

ملحوظة : يوجد طريقة أخرى للحل

(٤) امتحان منطقة الشرقية ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

(أ) (١) $\overleftarrow{أب} = \overleftarrow{ب} - \overleftarrow{أ}$

= (٣ ، −١) − (٦ ، ٣)

= (−٣ ، −٤)

(٢) شرط التعامد م١ م٢ = −١

∴ $\frac{٢}{٣} \times \frac{ك}{٢} = -١$ ∴ **ك = −٣**

(٣) ‖ $\overleftarrow{أ}$ ‖ = $\sqrt{٤ + ٤ \times ٣}$ = ٤

∴ طا هـ = $\frac{٢\sqrt{٣}}{٢} = \sqrt{٣}$

∴ ق(هـ) = ٦٠°

∴ $\overleftarrow{أ}$ = (٤ ، ٦٠°)

(٤) ∴ $\overleftarrow{ر}$ = (٥ ، صفر) + ك(٤ ، ٣)

(س ، ص) = (٥ ، ٠) + ك(٤ ، ٣)

س = ٥ + ٤ك ، ص = ٣ك

$\frac{س - ٥}{٤} = \frac{ص}{٣} \Leftarrow ٣س - ١٥ = ٤ص$

∴ ٣س − ٤ص − ١٥ = ٠

طول العمود = $\frac{|٣ \times ٠ - ٤ \times ٠ - ١٥|}{\sqrt{٩ + ١٦}}$

$= \frac{١٥}{٥} = ٣$ وحدة طول

(ب) ميل الأول = $\frac{-٢}{١} = -٢$

ميل الثانى = $\frac{-٢}{١} = -٢$

∵ الميلان متساويان

∴ المستقيمان متوازيان بفرض س = ٠ فى المعادلة الأولى

∴ ص = ٤ ∴ النقطة (٠ ، ٤)

البُعد بين المستقيمان هو البعد بين النقطة (٠ ، ٤)

والمستقيم ٢س + ص + ٣ = ٠

طول العمود = $\frac{|٢ \times ٠ + ٤ + ٣|}{\sqrt{٥}}$

$= \frac{٧}{\sqrt{٥}}$ وحدة طول

(جـ) المعادلة الاتجاهية هى :

$\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، −١) + ك(−٣ ، ٥)

ومنها توجد المعادلتان الوسيطتان أو البارامترية

وهما : س = ٣ − ٣ك

: ص = −١ + ٥ك

∴ $\frac{س - ٣}{-٣} = ك ، ك = \frac{ص + ١}{٥}$

∴ المعادلة العامة أو الكارتيزية هي :

(س − ٣)/(−٣) = (ص + ١)/٥

٥س − ١٥ = −٣ص − ٣

٥س + ٣ص − ١٢ = ٠

(٢) (أ) (١) ٢ أ − ب

= ٢(٢ ، ٣) − (٣ ، −٢)

= (٤ ، ٦) − (٣ ، −٢)

= (١ ، ٨)

(٢) النقطة هي (٢ ، ٥)

ونقطة الأصل (٠ ، ٠)

∴ (ص − ٠)/(س − ٠) = (٥ − ٠)/(٢ − ٠) ، **ص = ٥/٢ س**

(٣) ٣ أ + ٢ ب

= ٣(٤ ، ٢) + ٢(١ ، −٢)

= (١٢ ، ٦) + (٢ ، −٤)

= (١٤ ، ٢)

∴ ‖٣ أ + ٢ ب‖ = √(١٩٦ + ٤)

∴ المعيار = √٢٠٠ = ١٠√٢

(٤) أب + أجـ = ٢ أء

(ب) م١ = ميل المستقيم الأول = −١/٥

م٢ = ١/٤

ظا θ = |(م١ − م٢)/(١ + م١ م٢)| = |(−١/٥ − ١/٤)/(١ − ١/٢٠)|

= (٩/٢٠)/(١٩/٢٠) = ٩/١٩ ، ق(θ) = ٢٥° ٢٠َ ٤٦ً

(جـ) الرسم للتوضيح

التقسيم من الخارج

∴ س = (ل١ س٢ − ل٢ س١)/(ل١ − ل٢)

= (٣ × ٧ − ٢ × ٢)/(٣ − ٢) = ١٧

ص = (٣ × −١ − ٢ × ٥)/(٣ − ٢) = (−٣ − ١٠)/١ = −١٣

النقطة = (١٧ ، −١٣)

(٥) امتحان منطقة البحيرة ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

(أ) (١) شرط التوازي م١ = م٢

∴ ك/−٣ = −١/٢

∴ ك = ٣/٢

(٢)

النقطة التي تقع على محور السينات هي (س ، ٠)

∴ ص = (ل١ ص٢ + ل٢ ص١)/(ل١ + ل٢)

صفر = (ل١ × −٨ + ل٢ × ٤)/(ل١ + ل٢)

∴ ٨ل١ = ٤ل٢

∴ ل١/ل٢ = ١/٢ > ٠ ∴ النسبة ١ : ٢

(٣) ٤ك ‖أ‖ = ٣ ‖أ‖

∴ ٤ك = ٣ ∴ ك = ٣/٤

(٤) م١ = ميل الأول = −٢/−٣ = ٢/٣

م٢ = −٣/ب وبشرط التعامد

م١ × م٢ = −١ ، ∴ ٢/٣ × −٣/ب = −١

ب = ٢

(ب) طول العمود = |٥ × ١ − ١٢ × ٢ − ١٧|/√(٢٥ + ١٤٤)

= ٢٦/١٣ = ٢ وحدة طول

(جـ) بحل المعادلتين ٣س + ٢ص = ٧

٢س − ٣ص = −٤

∴ س = ١ ، ص = ٢

∴ نقطة تقاطع المستقيمين هما (١ ، ٢)

والنقطة (٣ ، ٤)

∴ الميل = (٤ − ٢)/(٣ − ١) = ٢/٢ = ١

∴ المعادلة المتجهة = أي نقطة + ك(١ ، ١)

∴ ر = (٣ ، ٤) + ك(١ ، ١)

أو ر = (١ ، ٢) + ك(١ ، ١)

(٢) (أ) (١) س/٢ + ص/٣ = ١ بالضرب × ٦

٣س + ٢ص = ٦

(٢) ∵ ظا هـ = الميل للمستقيم

∴ م = ٠,٧٥

∵ م = − معامل س/معامل ص = −أ/−٤ = أ/٤

∴ أ/٤ = ٠,٧٥ ∴ **أ = ٣**

(٣) ‖أ‖ = √(٦٤ × ٣ + ٦٤) = √٢٥٦ = ١٦

ظا θ = ٨/(٨√٣) = ١/√٣

∴ ق(θ) = ٣٠°

الصورة القطبية = (١٦ ، ٣٠°)

= (١٦ ، π/٦)

(٤) ٢ أ − ٣ ب

= ٢(٦ ، −٢) − ٣(٤ ، ٣)

= (١٢ ، −٤) + (−١٢ ، −٩)

= (٠ ، −١٣)

(ب) ∵ ب ء/ء جـ = ٣/٢

٢ ب ء = ٣ ء جـ

في Δ أ ب ء

أب + ب ء = أ ء بالضرب ×٢

∴ ٢ أب + ٢ ب ء = ٢ أ ء ...... (١)

في Δ أ ء جـ :

أجـ + جـ ء = أ ء بالضرب × ٣

∴ ٣ أجـ + ٣ جـ ء = ٣ أ ء .... (٢)

بالجمع (١) ، (٢)

٢ أب + ٢ ب ء + ٣ أجـ + ٣ جـ ء = ٥ أ ء .... (٣)

∵ ٢ ب ء = ٣ ء جـ = −٣ جـ ء

∴ (٣) تصبح بعد وضع ٢ ب ء = −٣ جـ ء

٢ أب − ٣ جـ ء

+ ٣ أجـ + ٣ جـ ء = ٥ أ ء

∴ ٢ أب + ٣ أجـ = ٥ أ ء

(جـ) ميل المستقيم المعطى = −١/٢

∵ المستقيم المطلوب يوازي المعطى

∴ ميل المستقيم المطلوب = −١/٢

∴ معادلة المستقيم ⇐ (ص + ٥)/(س − ٣) = −١/٢

٢ص + ١٠ = −س + ٣

٢ص + س + ٧ = ٠

(٦) امتحان منطقة القاهرة ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) من رسمها نجد أن :

البعد = ٥ وحدات طول

(ب) ∵ $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$

∴ $\frac{س_١}{ص_١} = \frac{س_٢}{ص_٢} \Leftarrow \frac{-٤}{-٣} = \frac{٨}{ك}$

∴ $-٤ك = -٢٤$ ∴ **ك = ٦**

(جـ) المعادلة الكارتيزية ص = ٥

(د) نقطة تلاقى المتوسطات = $\left(\frac{س_١ + س_٢ + س_٣}{٣} ، \frac{ص_١ + ص_٢ + ص_٣}{٣}\right)$

$= \left(\frac{٠+٣-٣}{٣} ، \frac{٨+٢+٥}{٣}\right) = (٠ ، ٥)$

(٢) (أ) $س = \frac{ل_١ س_٢ + ل_٢ س_١}{ل_١ + ل_٢}$

$= \frac{٣ × ٣ + ٢ × -٢}{٢ + ٣} = \frac{٥}{٥} = ١$

$ص = \frac{٣ × ١ + ٢ × ٥}{٢ + ٣} = \frac{١٣}{٥}$

∴ النقطة $(١ ، \frac{١٣}{٥})$

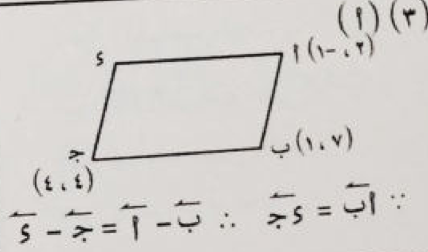
(ب) ∵ $م = \frac{١}{٣}$ ، $\overrightarrow{ى} = (٣ ، ١)$ ،

والنقطة (٢ ، −١)

∴ المعادلة المتجهة

$\overrightarrow{ر} = (٢ ، -١) + ك (٣ ، ١)$

(٣) (أ)



∵ $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{دجـ}$ ∴ $\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{د}$

∴ $\overrightarrow{د} = \overrightarrow{جـ} + \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}$

$= (٤ ، ٤) + (٢ ، -١) - (٧ ، ١)$

$= (-١ ، ٢)$

(ب) ∵ ٤ص = ٣س − ١١

∴ $ص = \frac{٣}{٤}س - \frac{١١}{٤}$

∴ $م_١ = \frac{٣}{٤}$ ، $م_٢ = -\frac{١}{٧}$

∵ $طا هـ = \frac{|م_١ - م_٢|}{|١ + م_١ م_٢|} = \frac{\left|\frac{٣}{٤} + \frac{١}{٧}\right|}{\left|١ - \frac{٣}{٤} × \frac{١}{٧}\right|}$

∴ $طا هـ = \frac{\frac{٢٥}{٢٨}}{\frac{٢٥}{٢٨}} = ١$ ∴ $ق(\hat{هـ}) = ٤٥°$

(٤) (أ) ∵ ٧س + ص = −٣ ⟵ (١)

٥س − ص = ٣ ⟵ (٢)

من (١) ، (٢) بحلهما

∴ س = ٠ ، ص = −٣

∴ نقطة تقاطع المستقيمين (٠ ، −٣)

، ميل المستقيم المطلوب = $\frac{-١ + ٣}{٢ - ٠}$

$= \frac{٢}{٢} = ١$

∴ معادلة المستقيم بدلالة نقطة وميل

$م = \frac{ص - ص_١}{س - س_١}$

∴ $\frac{ص + ١}{س - ٢} = ١$ ∴ ص + ١ = س − ٢

∴ **ص = س − ٣**

(ب) معادلة المستقين المار بالنقطتين

∵ $م = \frac{٠ + ٣}{٤ - ٠} = \frac{٣}{٤}$

∴ معادلة المستقيم : $\frac{ص + ٣}{س - ٠} = \frac{٣}{٤}$

∴ ٤ص + ١٢ = ٣س

∴ ٣س − ٤ص − ١٢ = ٠

[معادلة المستقيم المطلوب]

طول العمود = $\frac{|٣ × ٥ - ٤ × ٢ - ١٢|}{\sqrt{٩ + ١٦}}$

$= \frac{٥}{٥} =$ ١ وحدة طول

(٧) امتحان منطقة القليوبية ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) شرط التعامد

هو $م_١ × م_٢ = -١$ ∴ $\frac{٣}{٢} × \frac{-أ}{٣} = -١$

∴ **أ = ٢**

(ب) المعادلة هى :

$\overrightarrow{ر} = (٢ ، -٣) + ك (٣ ، ٤)$

(جـ) ∵ $٢\overrightarrow{أ} - ٣\overrightarrow{ب}$

$= ٢(٦ ، -٢) - ٣(٤ ، ٣)$

$= (٠ ، -١٣)$

∵ $\|٢\overrightarrow{أ} - ٣\overrightarrow{ب}\| = \sqrt{٠ + ١٦٩} = ١٣$

(د) $م_١ = -\frac{١}{٣}$ ، $م_٢ = ٢$

$طا هـ = \left|\frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢}\right|$

$= \left|\frac{-\frac{١}{٣} - ٢}{١ - \frac{١}{٣} × ٢}\right| = \frac{\frac{٧}{٣}}{\frac{١}{٣}}$

طا هـ = ٧ ∴ $ق(\hat{هـ}) = ٨١° ٥٢´$

(٢) (أ) طول العمود = $\frac{|٥ × ١ - ١٢ × ٢ - ٧|}{\sqrt{٢٥ + ١٤٤}}$

$= \frac{٢٦}{١٣} =$ ٢ وحدة طول

(ب)

$س = \frac{٢ × ٢ + ٣ × -٣}{٢ + ٣} = -١$

$ص = \frac{٢ × -١ + ٣ × ٤}{٢ + ٣} = \frac{١٠}{٥} = ٢$

∴ النقطة (−١ ، ٢)

(٣) (أ) الميل = طا ٤٥ = ١

∴ متجه اتجاه المستقيم = (١ ، ١)

المعادلة الإتجاهية

$\overrightarrow{ر} = (٣ ، -٤) + ك(١ ، ١)$

المعادلة البارامترية هما

س = ٣ + ك ، ص = −٤ + ك

(ب)

$\overrightarrow{د} = \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{ب}$

$= (٣ ، ٤) + (٢ ، -٢) - (٥ ، -١)$

$= (٠ ، ٣)$

(٤) (أ) ∵ $ل_١$ تصبح :

س = −١ + ٢ك ، ص = ٣ − ك

∴ $\frac{س + ١}{٢} = \frac{ص - ٣}{-١}$

∴ س + ١ = −٢ص + ٦

∴ المعادلة الإحداثية :

س + ٢ص − ٥ = ٠ ⟵ (١)

وبحلها مع المعادلة

٢س − ٣ص + ٤ = ٠ ⟵ (٢)

نجد س = ١ ، ص = ٢

∴ نقطة تقاطع المستقيم (١ ، ٢)

∴ ميل المستقيم المطلوب

$= \frac{٤ - ٢}{-٢ - ١} = \frac{٢}{-٣}$

معادلة المستقيم المطلوب

$(ص - ص_١) = م (س - س_١)$

$(ص - ٤) = -\frac{٢}{٣}(س + ٢)$

∴ ٣ص − ١٢ = −٢س − ٤

∴ المعادلة هى : **٣ص + ٢س − ٨ = ٠**

(ب) أ(٠ ، ٥) ، ب(٢ ، -١) ، جـ(٦ ، ٣)

$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (٢ ، -٦)$

$\|\overrightarrow{أب}\| = \sqrt{٤ + ٣٦} = \sqrt{٤٠}$

$\overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{أ}$

∴ $\overrightarrow{أجـ} = (٦ ، ٣) - (٠ ، ٥)$

$= (٦ ، -٢)$

∴ $\|\overrightarrow{أجـ}\| = \sqrt{٣٦ + ٤} = \sqrt{٤٠}$

∵ $\overrightarrow{بجـ} = \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{ب}$

$= (٦ ، ٣) - (٢ ، -١)$

$= (٤ ، ٤)$

∴ $\|\overrightarrow{بجـ}\| = \sqrt{١٦ + ١٦} = \sqrt{٣٢}$

∵ أب = أجـ ∴ Δ متساوى الساقين

∵ ب جـ أصغر من أب

∴ الزاوية حادة

∵ ميل $\overrightarrow{أب} = \frac{-٦}{٢} = -\frac{٣}{١} = م_١$

، ميل $\overrightarrow{أجـ} = \frac{-٢}{٦} = \frac{-١}{٣} = م_٢$

طا هـ $= \left| \frac{-٣ + \frac{١}{٣}}{١ + \frac{-٣}{١} \times -\frac{١}{٣}} \right| = \frac{\frac{٧}{٣}}{٢} = \frac{٧}{٦}$

∴ ق(هـ) = ق(أ) = ٤٩° ٢٤'

(٨) امتحان منطقة المنوفية ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) شرط التعامد $م_١ \times م_٢ = -١$

∴ $\frac{٣}{٢} \times \frac{-أ}{٣} = -١$ ∴ **أ = ٢**

(ب) المستقيم $\frac{س}{٤} + \frac{ص}{-٣} = ١$

أ = ٤ ، ب = -٣

المساحة = $\frac{١}{٢} \times ٤ \times ٣ = ٦$ وحدة طول

(جـ) ∵ س = $١٢\sqrt{٢}$ جتا $\left(\frac{\pi}{٤}\right) = ١٢$

ص = $١٢\sqrt{٢}$ جا $\frac{\pi}{٤} = ١٢$

∴ $\overrightarrow{م} = ١٢\overrightarrow{س} + ١٢\overrightarrow{ص}$

(د) $\overrightarrow{عب} = \overrightarrow{عأ} - \overrightarrow{ءب}$

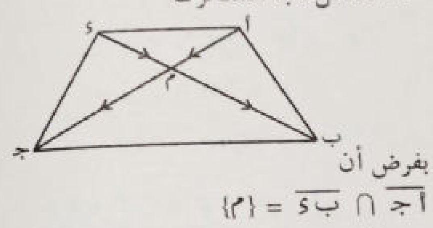
$= ١٢\overrightarrow{ى} - -٨\overrightarrow{ى} = ٢٠\overrightarrow{ى}$

(٢) (أ) ∵ $\overrightarrow{بجـ} = ٣\overrightarrow{أء}$

∴ $\overrightarrow{بجـ} // \overrightarrow{أء}$ ، ب جـ = ٣ أ ء

∴ الشكل فيه ضلعان متوازيان وغير متساويين

∴ الشكل شبه المنحرف



بفرض أن

$\overline{أجـ} \cap \overline{بء} = \{م\}$

فى Δ أ م ء

∵ $\overrightarrow{أم} + \overrightarrow{مء} = \overrightarrow{أء}$ ⟵ (١)

فى Δ ب م جـ

$\overrightarrow{بم} + \overrightarrow{مجـ} = \overrightarrow{بجـ}$ ⟵ (٢)

بجمع (١) ، (٢)

$(\overrightarrow{أم} + \overrightarrow{مجـ}) + (\overrightarrow{مء} + \overrightarrow{بم})$

$= \overrightarrow{أء} + \overrightarrow{بجـ}$ ⟵ (٣)

∵ $\overrightarrow{بجـ} = ٣\overrightarrow{أء}$

∴ (٣) تصبح $\overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{بء} = ٤\overrightarrow{أء}$

(ب) بفرض أن (ب) بين أ ، جـ

$\overrightarrow{ر_١} = (٥ ، -٢)$ ، $\overrightarrow{ر_٢} = (-١ ، ٤)$

$\overrightarrow{ر} = ب = (١ ، ٢)$

∵ $\overrightarrow{ر} = \frac{ل_١ \overrightarrow{ر_١} + ل_٢ \overrightarrow{ر_٢}}{ل_١ + ل_٢}$

∴ $(١ ، ٢) = \frac{ل_١(٥ ، -٢) + ل_٢(-١ ، ٤)}{ل_١ + ل_٢}$

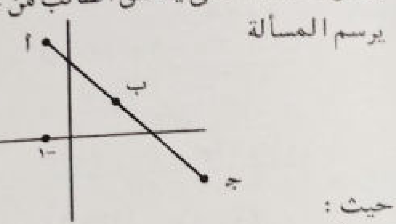
∴ $١ = \frac{٥ل_١ - ل_٢}{ل_١ + ل_٢}$

∴ $ل_١ + ل_٢ = ٥ل_١ - ل_٢$ ، $٤ل_١ = ٢ل_٢$

$٢ل_١ = ل_٢$ ∴ $\frac{ل_١}{ل_٢} = \frac{١}{٢}$ ، ∴ $\frac{ل_١}{ل_٢} > ٠$

∴ التقسيم من الداخل بنسبة ١ : ٢

ملحوظة هامة : حتى يتحقق الطالب من حله يرسم المسألة



حيث :

أ = (-١ ، ٤) ، ب = (١ ، ٢) ،

جـ = (٥ ، -٢)

واضح أن ب تقع على بين أ ، جـ بنسبة ١ : ٢

(٣) (أ) ∵ $\overrightarrow{ر} = \left(٠ ، \frac{١}{٣}\right) + ك(-٣ ، ٤)$

∴ س = -٣ك ، ص = $\frac{١}{٣}$ + ٤ك

∴ $\frac{س}{-٣} = \frac{\left(ص - \frac{١}{٣}\right)}{٤}$

∴ ٤س = -٣ص + ١

∴ المعادلة ٤س + ٣ص - ١ = ٠

طول العمود = $\frac{|٤ \times ٨ + ٣ \times -٢ - ١|}{\sqrt{١٦ + ٩}}$

$= \frac{٢٥}{٥} = ٥$ وحدات طول

(ب) المستقيم المعطى ص = $\frac{٣}{٢}$س

∴ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{٣}{٢}$

∴ متجه اتجاه المستقيم (٢ ، ٣)

∴ الصورة الإتجاهية للمعادلة المطلوبة

$\overrightarrow{ر} = (٧ ، ٤) + ك(٢ ، ٣)$

، المعادلتان البارامتريتان :

س = ٧ + ٢ك ، ص = ٤ + ٣ك

المعادلة الإحداثية :

$\frac{س - ٧}{٢} = \frac{ص - ٤}{٣}$

∴ ٣س - ٢١ = ٢ص - ٨

∴ المعادلة هى **٣س - ٢ص - ١٣ = ٠**

(٤) (أ) ميل المستقيم المار بالنقطتين

$م_١ = \frac{-١ - ١}{٤ - ٢} = \frac{-٢}{٢} = -١$

ميل المستقيم الثانى = $م_٢ = \frac{١}{٢}$

∴ طا هـ $= \left| \frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢} \right| = \left| \frac{-١ - \frac{١}{٢}}{١ + -١ \times \frac{١}{٢}} \right|$

$= \frac{\frac{٣}{٢}}{\frac{١}{٢}} = ٣$

∴ ق(هـ) ≃ ٧١° ٣٤'

(ب) $\frac{١}{٢}\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} - ٣\overrightarrow{جـ}$

$= \frac{١}{٢}(٤ ، -٦) + (-٦ ، ٩) - ٣(-٣ ، -٢)$

$= (٢ ، -٣) + (-٦ ، ٩) + (٩ ، ٦)$

$= (٥ ، ١٢)$

∴ $\left\| \frac{١}{٢}\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} - ٣\overrightarrow{جـ} \right\|$

$= \sqrt{٢٥ + ١٤٤} = ١٣$

(٩) امتحان منطقة الغربية ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$

$= (٣ ، -١) - (٦ ، ٣)$

$\overrightarrow{أب} = (-٣ ، -٤)$

∴ $\|\overrightarrow{أب}\| = \sqrt{٩ + ١٦} = ٥$

(ب) قياس الزاوية هى ٩٠°

(جـ) ∵ $\|\overrightarrow{ق}\| = \sqrt{٦٤ + ٦٤} = ٨\sqrt{٢}$

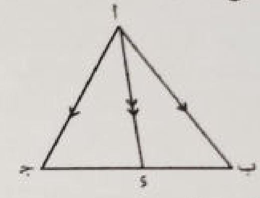
، طا θ = $\frac{ص}{س} = ١$

∴ ق(θ) = طا$^{-١}$(١) = ٤٥°

∴ θ = $\frac{\pi}{٤}$ ∴ $\overrightarrow{ق} = \left(٨\sqrt{٢} ، \frac{\pi}{٤}\right)$

(د) **ص = −٤**

(٢) (أ) في Δ أ ب د



أب + ب د = أد بالضرب × ٢

٢أب + ٢ب د = ٢أد .... (١)

في Δ أ د جـ

أجـ + جـ د = أد بالضرب × ٣

∴ ٣أجـ + ٣جـ د = ٣أد .... (٢)

بجمع (١) ، (٢)

٢أب + ٣أجـ + ٢ب د + ٣جـ د = ٥أد .... (٣)

∵ ٢ب د = ٣د جـ = −٣جـ د

∴ من (٣)

٢أب + ٣أجـ − ٣جـ د + ٣جـ د = ٥أد

∴ ٢أب + ٣أجـ = ٥أد (المطلوب)

(ب) $م_١ = \frac{-٣}{-٤} = \frac{٣}{٤}$

$م_٢ = \frac{-٦}{-٨} = \frac{٣}{٤}$

∵ $م_١ = م_٢$ ∴ المستقيمان متوازيان.

بفرض نقطة على المستقيم الأول وليكن ص = ٠

∴ النقطة (٢ ، ٠) تقع على المستقيم الأول

∴ البعد = $\frac{|٨ \times ٠ - ٦ \times ٢ - ١٣|}{\sqrt{٦٤ + ٣٦}}$

= $\frac{٢٥}{١٠}$ = ٢,٥ وحدة طول

(٣) (أ)

∵ $ل_١ : ل_٢ = ٥ : -٣$

∴ $ر = \frac{ل_٢ ر_١ + ل_١ ر_٢}{ل_١ + ل_٢}$

= $\frac{٥(-٢ ، ٣) - ٣(-٤ ، ١)}{٥ - ٣}$

= $\frac{(٢ ، ١٢)}{٢}$ = (١ ، ٦)

(ب) المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين هي :

س − ص + ٢ + ك(٢س + ص − ٨) = ٠

ويمر بالنقطة (٣ ، ٤) ∴ يحقق المعادلة

∴ ٣ − ٤ + ٢ + ك(٢×٣ + ٤ − ٨) = ٠

١ + ٢ك = ٠ ∴ ك = $-\frac{١}{٢}$

∴ المعادلة هي : س − ص + ٢ + $(-\frac{١}{٢})$ (٢س + ص − ٨) = ٠ بالضرب ×٢

∴ ٢س − ٢ص + ٤ − ٢س − ص + ٨ = ٠

∴ −٣ص + ١٢ = ٠ ∴ **ص = ٤**

(١٠) امتحان منطقة البحيرة ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) $م_١ = \frac{-٣}{-٢} = \frac{٣}{٢}$ ، $م_٢ = \frac{-أ}{-٣} = \frac{أ}{٣}$

∵ المستقيمان متعامدان

$م_١ \times م_٢ = -١$

∴ $\frac{٣}{٢} \times \frac{أ}{٣} = -١$ ∴ **أ = −٢**

(ب) ق = ٢٠حتا ٣٠° س − ٢٠ حا ٣٠ ص

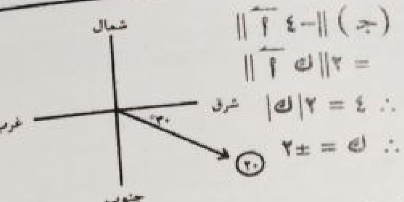
∴ ق = ١٠√٣ س − ١٠ص

(جـ) ||−٤ أ||

= ٢||ك أ||

∴ ٤ = ٢|ك|

∴ ك = ±٢



(د) بفرض أن محور السينات يقطع أب في نقطة (هـ) = (س ، ٠)

∴ $ص = \frac{ل_١ ص_٢ + ل_٢ ص_١}{ل_١ + ل_٢}$

صفر = $\frac{ل_١ \times -٨ + ل_٢ \times ٤}{ل_١ + ل_٢}$

$-٨ل_١ + ٤ل_٢ = ٠$ ∴ $٢ل_١ = ل_٢$

∴ $\frac{ل_١}{ل_٢} = \frac{١}{٢} > ٠$

∴ التقسيم من الداخل بنسبة ١ : ٢

إحداثي نقطة س = $\frac{١ \times ٦ + ٢ \times -٣}{٢ + ١}$

= صفر

∴ النقطة هي (٠ ، ٠) نقطة الأصل

فإن محور السينات يقسم أب من الداخل بنسبة ١ : ٢

(٢) (أ) ميل المستقيم الأول = $م_١$

= $\frac{-٢}{١}$ = −٢

ميل المستقيم الثاني = $م_٢ = \frac{-٢}{١}$ = −٢

∵ $م_١ = م_٢$ ∴ المستقيمان متوازيان

∵ (٠ ، ٤) تقع على المستقيم الأول

∴ البعد = $\frac{|٢ \times ٠ + ٤ + ٢|}{\sqrt{٤ + ١}} = \frac{٦}{\sqrt{٥}}$

(ب) سبق البرهنة في المنوفية رقم (٢) (أ)

(٣) (أ) ميل الأول = $م_١ = \frac{-١}{-ك} = \frac{١}{ك}$

$م_٢ = \frac{-٢}{-١} = ٢$

∵ طا $\frac{\pi}{٤} = \left|\frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢}\right|$

١ = $\left|\frac{\frac{١}{ك} - ٢}{١ + \frac{١}{ك} \times ٢}\right|$ ، ±١ = $\frac{\frac{١}{ك} - ٢}{١ + \frac{٢}{ك}}$

الحالة الأولى : $\frac{١}{ك} - ٢ = ١ + \frac{٢}{ك}$

$-\frac{١}{ك} = ٣$

∴ **ك = $-\frac{١}{٣}$**

الحالة الثانية : $\frac{\frac{١}{ك} - ٢}{١ + \frac{٢}{ك}} = -١$

$-١ - \frac{٢}{ك} = \frac{١}{ك} - ٢$

$١ = \frac{٣}{ك}$

∴ **ك = ٣**

(ب) ميل المستقيم = طا ٤٥ = ١

∴ منحنى اتجاه المستقيم = (١ ، ١)

∴ المعادلة الاتجاهية

ر = (٣ ، −٤) + ك(١ ، ١)

المعادلتان البارامتريتان

س = ٣ + ك ، ص = −٤ + ك

∴ المعادلة الإحداثية :

ك = س − ٣ = ص + ٤

∴ **س − ص − ٧ = ٠**

(٤) (أ) البعد بين (٠ ، ٠) والوتر الأول

∴ البعد

= $\frac{|٣ \times ٠ + ٤ \times ٠ + ١٠|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{١٠}{٥} = ٢$

والبعد بين (٠ ، ٠) والوتر الثاني

البعد = $\frac{|٥ \times ٠ - ١٢ \times ٠ + ٢٦|}{\sqrt{٢٥ + ١٤٤}} = \frac{٢٦}{١٣} = ٢$

∵ البعد بينهما متساوى

∴ الوتران متساويان

(ب) نقطة تقاطع المستقيمين

٢س + ص = ٥ .... (١)

س + ٥ص = ١٦ .... (٢)

بحلهما ∴ س = ١ ، ص = ٣

∴ النقطة (١ ، ٣) نقطة التقاطع وميل المستقيم المعلوم = ١-/١- = ١

∴ ميل المستقيم العمودى على المستقيم المعلوم = -١

∴ معادلة المستقيم المطلوب

(ص - ٣) = -١(س - ١)

ص - ٣ + س - ١ = ٠

∴ **ص + س - ٤ = ٠**

(١١) امتحان منطقة أسيوط ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

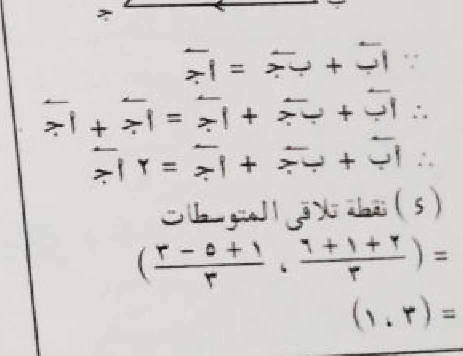
(١) (أ) أ

= (٦ حتا π/٣) س + (٦ حا π/٣) ص

= ٣ س + ٣√٣ ص

(ب) الزاوية ٩٠° من الرسم

(جـ)



∵ أب + ب جـ = أ جـ

∴ أب + ب جـ + أ جـ = أ جـ + أ جـ

∴ أب + ب جـ + أ جـ = ٢ أ جـ

(د) نقطة تلاقى المتوسطات

= ((٢ + ١ + ٦)/٣ ، (١ + ٥ - ٣)/٣)

= (٣ ، ١)

(أ) المعادلة الإتجاهية

ر = (-٢ ، -٥) + ك(٣ ، ١)

المعادلة الإحداثية : (ص + ٥)/(س + ٢) = ١/٣

٣ص + ١٥ = س + ٢

٣ص - س + ١٣ = ٠

(ب)

أ (١ ، -٤) ، جـ ، ب (٦ ، ٦)

س = (٢ × ١ + ٣ × ٦)/(٢ + ٣) = ٢٠/٥ = ٤

ص = (٢ × -٤ + ٣ × ٦)/(٢ + ٣) = ١٠/٥ = ٢

∴ جـ = (٤ ، ٢)

(٣) (أ) تحويل المعادلة الاتجاهية إلى الإحداثية

∴ ص - ٢ = -٣/٤ (س + ١)

∴ ٤ص - ٨ = -٣س - ٣

∴ ٤ص + ٣س - ٥ = ٠

(ب) ‖أ‖ = √(١٦ + ٤٨) = ٨

∵ طا θ = ٤√٣/٤ = √٣

∴ ق(θ) = ٦٠° = π/٣

∴ و أ = (٨ ، π/٣)

(٤) (أ) نقطة التقاطع

٢س + ص = ٨ .... (١)

س - ص = ١ .... (٢)

من(١) ، (٢) س = ٣ ، ص = ٢

∴ النقطة (٣ ، ٢)

∴ معادلة التى توازى محور الصادات هى **س = ٣**

(ب) ٤ك ‖أ‖ = ٣ ‖أ‖

٤ك = ٣ ∴ **ك = ٣/٤**

(١٢) امتحان منطقة القاهرة ١٤٢٨هـ/٢٠١٧م

(١) (أ)

ص = ٣ ، س ، ص = -٢

البُعد بين المستقيمين = ٥ وحدات

(ب) ميل الأول = ميل الثانى

∴ -أ/٣ = -٢/-٣ ∴ أ = -٢

(جـ) نقطة تقاطع المستقيمين (٣ ، ٣)

ونقطة الأصل (٠ ، ٠)

∴ (ص - ٣)/(س - ٣) = (٠ - ٣)/(٠ - ٣) = ١

∴ ص - ٣ = س - ٣ ∴ ص = س

(د) أ (-٣ ، ٧) ، جـ (٣ ، ٦) ، ب (س ، ص)

∴ (-٣ + س)/٢ = ٣ ∴ -٣ + س = ٦

∴ س = ٩ ، (٧ + ص)/٢ = ٦

∴ ٧ + ص = ١٢

∴ ص = ٥ ∴ ب = (٩ ، ٥)

(٢) (أ) أ (٨ ، ٣) ، ٤ ، جـ (٢ ، ٥) ، ١ ، ب (س ، ص)

٢ = (١ × ٨ + ٤س)/(١ + ٤) ،

∴ ١٠ = ٨ + ٤س ∴ ٤س = ٢

∴ س = ١/٢

٥ = (١ × ٣ + ٤ص)/(١ + ٤) ،

∴ ٢٥ = ٣ + ٤ص ∴ ٢٢ = ٤ص

∴ ص = ١١/٢ ∴ ب = (١/٢ ، ١١/٢)

(ب) طول العمود = |١ × ١ + ١ × ١|/√(١ + ١)

= ٢/√٢ = √٢ وحدات طول

(٣) (أ) م١ = -٣/٤ ، م٢ = -١/٧

∴ طا هـ = |(م١ - م٢)/(١ + م١ م٢)| = |(-٣/٤ + ١/٧)/(١ + ٣/٤ × ١/٧)|

= (١٧/٢٨)/(٣١/٢٨) = ١٧/٣١

∴ ق(هـ) = ٢٨° ٤٤ََ ٢٣َ

(ب) المعادلة المتجهة للمستقيم :

ر = ق + ك ى

∴ المتجه (-١ ، ٢) عمودى عليه

، ى = (٢ ، ١)

∴ ر = (-٣ ، ٥) + ك(٢ ، ١)

∵ س = -٣ + ٢ك ص = ٥ + ك

∴ (س + ٣)/٢ = ك ك = (ص - ٥)/١

∴ (س + ٣)/٢ = (ص - ٥)/١

∴ س + ٣ = ٢ص - ١٠

∴ س - ٢ص + ١٣ = ٠ المعادلة الكارتيزية

(٤) (أ) بالقسمة على ١٢

∴ س/٤ + س/٣ = ١

∴ طولا الجزئين المقطوعين من المحورين السينى والصادات هما ٤ ، ٣ على الترتيب .

(ب) ∵ أ١س + ب١ص + جـ١ + ك(أ٢س + ب٢ص + جـ٢) = ٠

∴ س + ٢ص - ٥ + ك(٢س - ٣ص + ٤) = ٠

(-٢ ، ٤) ∈ المستقيم

∴ -٢ + ٢ × ٤ - ٥ + ك(٢ × -٢ - ٣ × ٤ + ٤) = ٠

∴ ١ + ك(−١٢) = ٠ ∴ ك = $\frac{١}{١٢}$

∴ س + ٢ص − ٥ + $\frac{١}{١٢}$(٢س − ٣ص + ٤) = ٠

∴ ١٢س + ٢٤ص − ٦٠ + ٢س − ٣ص + ٤ = ٠

∴ ١٤س + ٢١ص − ٥٦ = ٠ (÷ ٧)

∴ ٢س + ٣ص − ٨ = ٠

(١٣) امتحان منطقة الغربية ١٤٣٨هـ/٢٠١٧م

(١) (أ) م١ = $\frac{-١}{-٣}$ ، م٢ = $\frac{-١}{٢}$

∴ ظا هـ = $\left|\frac{\text{م}_١ - \text{م}_٢}{١ + \text{م}_١ \text{م}_٢}\right| = \left|\frac{\frac{١}{٣} + \frac{١}{٢}}{١ - \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٢}}\right|$

∴ ظا هـ = ١ ∴ ق(هـ) = ٤٥°

(ب) $\overrightarrow{\text{أب}} = \overline{\text{ب}} - \overline{\text{أ}}$

= (٤ ، −٥) − (١ ، −١)

= (٣ ، −٤)

∴ $\|\overrightarrow{\text{أب}}\|$ = $\sqrt{٩+١٦}$ = ٥

(جـ) ٣ك = ١٢ ∴ ك = ٤

(د) ١٢$\sqrt{٢}$ جتا $\frac{\pi}{٤}$ = ١٢

، ١٢$\sqrt{٢}$ جا $\frac{\pi}{٤}$ = ١٢

∴ $\overline{\text{م}}$ = ١٢$\overline{\text{س}}$ + ١٢$\overline{\text{ص}}$

(٢) (١) $\overline{\text{أ}} \parallel \overline{\text{ب}}$ ∴ $\frac{\text{ص}_٢}{\text{س}_٢} = \frac{\text{ص}_١}{\text{س}_١}$

∴ $\frac{\text{ك}}{٦} = \frac{-١}{٣}$ ⇐ ٣ك = −٦ ∴ ك = −٢

، $\overline{\text{أ}} \perp \overline{\text{ب}}$ ⇐ $\frac{\text{ص}_٢}{\text{س}_٢} \times \frac{\text{ص}_١}{\text{س}_١}$ = −١

∴ $\frac{\text{ك}}{٦} \times \frac{-١}{٣}$ = −١ ∴ ك = ١٨

(ب) في Δ أ ب د :

$\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب د}} = \overrightarrow{\text{أ د}}$

(بالضرب × ٢)

∴ ٢$\overrightarrow{\text{أب}}$ + ٢$\overrightarrow{\text{ب د}}$ = ٢$\overrightarrow{\text{أ د}}$ ...... (١)

في Δ أ د جـ :

$\overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{جـ د}} = \overrightarrow{\text{أ د}}$ (بالضرب × ٣)

∴ ٣$\overrightarrow{\text{أجـ}}$ + ٣$\overrightarrow{\text{جـ د}}$ = ٣$\overrightarrow{\text{أ د}}$ .... (٢)

من (١) ، (٢) بالجمع :

٢$\overrightarrow{\text{أب}}$ + ٢$\overrightarrow{\text{ب د}}$ + ٣$\overrightarrow{\text{أجـ}}$ + ٣$\overrightarrow{\text{جـ د}}$

= ٥$\overrightarrow{\text{أ د}}$

∵ ٢$\overrightarrow{\text{ب د}}$ = ٣$\overrightarrow{\text{د جـ}}$

∴ ٢$\overrightarrow{\text{ب د}}$ − ٣$\overrightarrow{\text{د جـ}}$ = $\overrightarrow{٠}$

∴ ٢$\overrightarrow{\text{ب د}}$ + ٣$\overrightarrow{\text{جـ د}}$ = ٢$\overrightarrow{\text{ب د}}$ − ٣$\overrightarrow{\text{د جـ}}$

= $\overrightarrow{٠}$

∴ ٢$\overrightarrow{\text{أب}}$ + ٣$\overrightarrow{\text{أجـ}}$ = ٥$\overrightarrow{\text{أ د}}$

(٣) (أ) ميل المستقيم المعلوم = $\frac{٣}{٤}$

∴ معادلة المستقيم المطلوب :

$\frac{\text{ص} - ٥}{\text{س} - ٢} = \frac{٣}{٤}$

∴ ٤ص − ٢٠ = ٣س − ٦

∴ ٤ص − ٣س − ١٤ = ٠

(ب) ميل المستقيم الأول = $\frac{٤}{٣}$

، ميل المستقيم الثانى = $\frac{-٤}{-٣} = \frac{٤}{٣}$

∴ الميلان متساويان

∴ المستقيمان متوازيان

نعتبر نقطة (٠ ، $\frac{٧}{٣}$) تقع على المستقيم الأول

بُعدها عن المستقيم :

٥س − ٣ص + ١٧ = ٠

∴ البعد = $\left|\frac{٤\times٠ - ٣\times\frac{٧}{٣} + ١٧}{\sqrt{١٦+٩}}\right| = \frac{١٠}{٥} = ٢$